أنظمة المعادلات

Systems of Equations

مراجعة :

المعادلة : جملة مفتوحة تظهر فيها فقط إشارة المساواة .

مثال :

١) ٢س + ٣ = ٥   ٢) س ^{٢} + ٣س − ١ = ٠

٣) س + ٣ص = ٤   ٤) س ^{٢} + ص ^{٢} = ١

أنواع المعادلات

أ) المعادلات الخطية :

- معادلة خطية بمتغير واحد مثل ١) ٢س − ١ = ٥   ٢) ٣س + ٤ = ٧

ويوجد لها حل وحيد فقط في مجموعة الأعداد الحقيقية .

مثال : جد مجموعة حل المعادلة ٣س + ٥ = −١

الحل : باستخدام خصائص المساواة

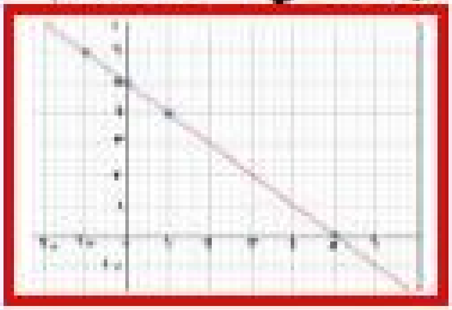
٣س + ٥ − ٥ = −١ − ٥ ← ٣س = −٦

$\frac{١}{٣}$ × ٣س = −٦ × $\frac{١}{٣}$ ← $\boxed{\text{س = −٢}}$

- معادلة خطية بمتغيرين مثل ١) س − ص = ٥   ٢) ٣ع + ل = ٤

ويوجد لها عدد لا نهائي من الحلول فمثلا المعادلة س + ص = ٥ ، يوجد لها عدد لا نهائي من الحلول على شكل أزواج مرتبة (س،ص) نذكر منها

(١،٤)(− ١،٦)(٥،٠)،(٠،٥) وتمثل مجموعة حل المعادلة بيانياً على شكل خط مستقيم (الشكل المجاور) حيث كل نقطة من النقاط الواقعة على الخط المستقيم تعتبر حلاً للمعادلة .



- معادلة خطية بثلاث متغيرات مثل

س + ص + ع = ٤ ، ويوجد لها عدد لا نهائي

من الحلول نذكر منها (١،١،٢)(− ١،٦،− ١)(٢،٢،٠)،(٠،٠،٤)

وتمثل مجموعة الحل في مستوى ثلاثي الأبعاد .

ب) معادلات من الدرجة الثانية

- معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد وتكتب على الصورة التالية :

ا س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ← ا ≠ ٠، ا، ب، جـ ∈ ح

والمعادلة من الدرجة الثانية يمكن أن يكون لها حل أو لا يوجد لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية . ولمعرفة هل يوجد للمعادلة حل أم لا نجد قيمة ما يسمى بمميز المعادلة التربيعية ← ب^{٢} − ٤ ا جـ ويرمز له بالرمز Δ

إذا كان :

١) $\Delta \succ$ ٠ فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

٢) Δ = ٠ فإن للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

٣) $\Delta \prec$ ٠ لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية .

ولإيجاد مجموعة حل المعادلة التربيعية (إن وجدت) نستخدم طريقة التحليل إلى العوامل أو القانون العام

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ٤أجـ}}{٢أ} \quad \text{أو} \quad س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$$

مثال : جد مجموعة حل المعادلات الآتية (إن وجدت) :

١) س^{٢} + ٣س + ٥ = ٠

الحل : أ = ١، ب = ٣ ، جـ = ٥

المميز Δ ← ب^{٢} − ٤أجـ = (٣)^{٢} − ٤ × ١ × ٣ = $\boxed{-٢}$ < ٠

بما أن Δ < ٠ **لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية (لا يوجد لها حل) .**

٢) س^{٢} − س − ٦ = ٠

الحل : أ = ١ ، ب = −١ ، جـ = −٦

المميز Δ ← ب^{٢} − ٤أجـ = (−١)^{٢} − ٤ × ١ × (−٦) = $\boxed{٢٥}$ > ٠

Δ > ٠ **للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .**

س^{٢} − س − ٦ = ٠ ← (س − ٣)(س + ٢) = ٠

إما س − ٣ = ٠ ← $\boxed{س = ٣}$ **أو** س + ٢ = ٠ ← $\boxed{س = -٢}$

مجموعة الحل هي {−٢ ، ٣}

٣) س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠

الحل : أ = ١ ، ب = ٦ ، جـ = ٩

المميز Δ ← ب^{٢} − ٤أجـ = (٦)^{٢} − ٤ × ١ × (٩) = $\boxed{٠}$ = ٠

Δ = ٠ **للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .**

س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠ ← (س + ٣)(س + ٣) = ٠

إما س + ٣ = ٠ ← $\boxed{\text{س} = -٣}$ أو س + ٣ = ٠ ← $\boxed{\text{س} = -٣}$

مجموعة الحل هي { − ٣ }

٤) س² + ٣س − ٥ = ٠

الحل : أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = − ٥

المميز Δ ← ب² − ٤أجـ = (٣)² − ٤ × ١ × (− ٥) = $\boxed{٢٩}$ ≻ ٠

Δ ≻ ٠ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

تستخدم القانون العام في حل المعادلة لأن الحل بالتحليل صعب جداً (لماذا ؟)

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٢٩}}{٢}$$

مجموعة الحل $\left\{\frac{-٣ \pm \sqrt{٢٩}}{٢}\right\}$ أو $\left\{\frac{-٣ + \sqrt{٢٩}}{٢} ، \frac{-٣ - \sqrt{٢٩}}{٢}\right\}$

ملاحظة : يمكن استخدام طرق أخرى لحل المعادلات السابقة مثل طريقة إكمال المربع أو التمثيل البياني .

- معادلة من الدرجة الثانية بمتغيرين . (لن نتوسع في الشرح)

مثال

١) س² + ٣ص² = ٥ ٢) س² + ٢س ص − ١٠ص² = ٠

٣) س² − ٣ص² = ٤ ٤) س² + ص² − ٤ص + ٥ = ٠

وهناك معادلات أخرى تعامل معاملة التربيعي سوف نتطرق لها لاحقا .

نظام من المعادلات : هو عبارة عن مجموعة من المعادلات لها حل أو أكثر مشترك .

ومن أنظمة المعادلات التي تم دراستها سابقا نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، وتعلمت كذلك حل النظام بطريقة من الطرق التالية :

التمثيل البياني ، التعويض ، الحذف

. ((ملاحظة : هناك بعض الأنظمة من المعادلات لا يوجد لها حل أو يوجد لها عدد لا نهائي من الحلول)) .

مثال : حل كلاً من أنظمة المعادلات الخطية الآتية :

١) ٢س − ٣ص = −٤
س + ٢ص = ٥

الحل : طريقة التعويض

٢س − ٣ص = −٤ ...(١)
س + ٢ص = ٥ ....(٢)

- **نرقم المعادلات (اختياري)**
- **نختار أي من المعادلتين لجعل أحد المتغيرين موضع للقانون (الأسهل م٢)**
  ونجعل س موضع للقانون ونعطيها الرقم ٣ ← س = ٥ − ٢ص ...(٣)
- **نعوض م٣ في م١ ونحل المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة المتغير ص .**

٢(٥ − ٢ص) − ٣ص = −٤ ← ١٠ − ٤ص − ٣ص = −٤

− ٧ص = −١٤ ← ← ص = ٢

- **نعوض قيمة ص الناتجة من الخطوة السابقة في م٣ لإيجاد قيمة س**

س = ٥ − ٢(٢) ← س = ١

- **مجموعة الحل (س،ص) = (١،٢)**
- **وللتحقق من صحة الحل نعوض قيمة كل من س ، ص في معادلات النظام .**

عند س = ١ ، ص = ٢ في م١ ← ٢ − ٦ = −٤ **الطرف الأيسر**

عند س = ١ ، ص = ٢ في م٢ ← ١ + ٤ = ٥ **الطرف الأيسر**

سليمان دلدوم أبو هيه

طريقة الحذف
٢س − ٣ص = −٤
س + ٢ص = ٥

- نختار أي من المتغيرين لحذفه وذلك بجعل معامليه متساويين في القيمة ومختلفين في الإشارة ونختار هنا المتغير س .
- نضرب المعادلة الأولى في ٢ ، نضرب المعادلة الثانية في ٣ .

٢(٢س − ٣ص = −٤) ← ٤س − ٦ص = −٨
٣(س + ٢ص = ٥) ← ٣س + ٦ص = ١٥

- نجمع المعادلتين الناتجتين ونلاحظ أنه تم حذف المتغير ص .

٤س − ٦ص = −٨
٣س + ٦ص = ١٥

٧س = ٧ ← $\boxed{\text{س} = ١}$

- نعوض قيمة س في أي معادلة ولتكن ٢ , لإيجاد قيمة ص .

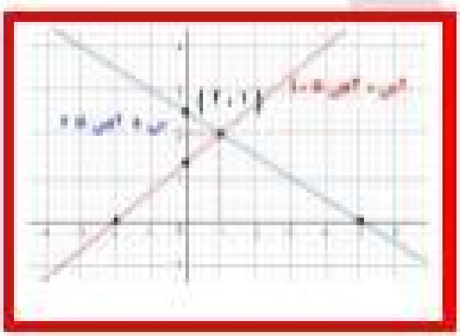
س = ١ ← ١ + ٢ص = ٥ ← $\boxed{\text{ص} = ٢}$

مجموعة الحل (س،ص) = (١،٢) ونتحقق من صحة الحل .

الطريقة الثالثة / التمثيل البياني : يفضل استخدام نقط التقاطع مع المحورين

٢س − ٣ص = −٤

س	٠	٢-
ص	٤ / ٣	٠
(س ، ص)	(٠ ، ٤/٣)	(-٢ ، ٠)



س + ٢ص = ٥

س	٠	٢-
ص	٤ / ٣	٠
(س ، ص)	(٠ ، ٤/٣)	(-٢ ، ٠)

٢) ٢س – ٣ص = ٣
٤س – ٦ص = ٦

الحل : عند التدقيق في النظام نلاحظ أن المعادلة الثانية ناتجة من ضرب المعادلة الأولى في (٢) ، لذلك فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول للنظام . وبيانيا نقول أن المستقيمان منطبقان على بعضهما البعض ، وجبريا عند حل النظام الناتج ٠ = ٠ .

٣) ٣س + ٤ص = ٧
٣س + ٤ص = ٩

الحل :

نلاحظ هنا في النظام أن معامل س في المعادلة الأولى يساوي معامل س في المعادلة الثانية ، وكذلك بالنسبة لمعامل ص ، لكن الحد الثابت في المعادلة الأولى لا يساوي الحد الثابت في المعادلة الثانية ، لذلك لا يوجد حل للنظام ، وبيانيا المستقيمان متوازيان ، وجبرياً الناتج ٠ = –٢ ، لذلك جبرياً إذا كان الناتج صفر = عدد ، فإنه لا يوجد حل للنظام .

هناك الكثير من أنظمة المعادلات ، لكن سوف تقتصر دراستنا عل حل الأنظمة التالية :

١) نظام مكون من ثلاث معادلات خطية بثلاث متغيرات .

٢) نظام مكون من معادلتين تربيعتين بمتغيرين .

٣) نظام مكون من معادلة تربيعية ومعادلة خطية بمتغيرين .

حل مشكلات تتضمن تكوين أنظمة من المعادلات الخطية والتربيعية .

إن شاء الله سوف نستخدم التمثيل البياني لتوضيح بعض حلول الأنظمة باستثناء الحالة الأولى لصعوبة تمثيلها بيانيا .

حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية

Solving of a System of three Linear Equations

سبق وأن تعلمنا أنه عند تمثيل معادلة خطية بمتغيرين بيانياً فإن الشكل الناتج عبارة عن خط مستقيم ، حيث كل النقاط الواقعة على الخط المستقيم تعتبر حلاً للمعادلة (عدد لا نهائي من الحلول) .

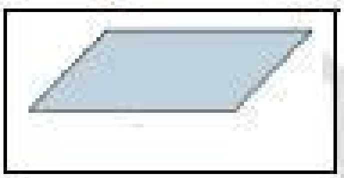
المعادلة التي على الصورة أس + ب ص + جـ ع = د حيث أ،ب،جـ،د ثوابت س،ص،ع متغيرات تسمى معادلة خطية بثلاث متغيرات ، وعدد الحلول لها عدد لا نهائي من الحلول .

فمثلاً المعادلة س + ص + ع = ٦ يوجد لها عدد لا نهائي من الحلول نذكر منها

(٣،٠،٣)،(-١،-٢،٩)،(٠،٣،٣)،(٢،٢،٢)، . . . .

لاحظ هنا ألزوج المرتب يتكون من ثلاث مساقط لذلك لا يمكن تمثيله بيانيا في مستوى بياني ثنائي الأبعاد ، لذلك نحتاج إلى مستوى ثلاثي الأبعاد محاوره س،ص،ع لتمثيل مجموعة حل المعادلة .

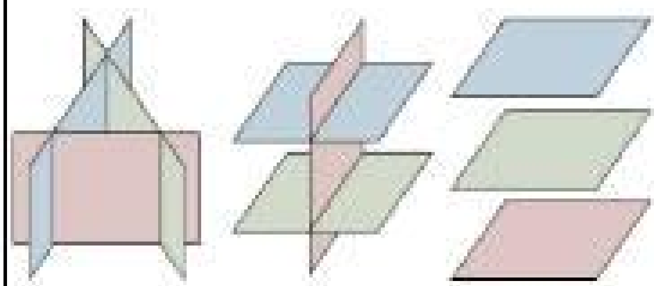
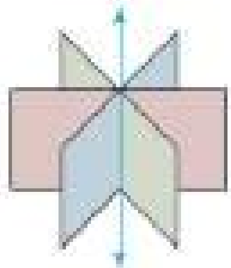
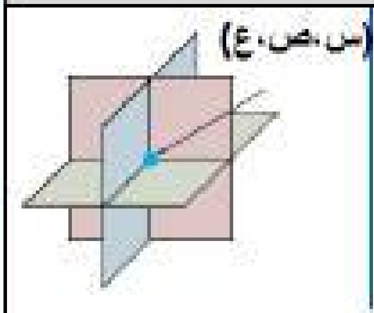
وعند تمثيل حلول معادلة بيانياً (برامج رسم خاصة) ، نحصل على شكل يسمى مستوى (الشكل المجاور) ((أنظر داخل غرفة الصف))



لذلك فإنه صعب جدا تمثيل مجموعة حل المعادلة الخطية بثلاث متغيرات بيانياً .

وسنكتفي هنا بحل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية بثلاث متغيرات باستخدام الطريقة الجبرية فقط (تعويض ، حذف ، كريمر (تدرس في وحدة المصفوفات)) ،مع ملاحظة أن النظام يمكن أن يكون له حل وحيد ، عدد لا نهائي من الحلول ، أو لا يوجد له حل .

المخطط التالي يبين الحالات التي يكون فيها للنظام حل وحيد ، عدد لا نهائي من الحلول أو لا يوجد حل .

أنظمة خطية مكونة من ثلاث متغيرات		
لا يوجد حل	عدد لا نهائي من الحلول	حل وحيد
		
لا يوجد نقاط مشتركة	المستويات الثلاث مشتركة في خط مستقيم	المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة

من خلال المثال التالي سوف نوضح طريقة حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية باستخدام طريقة الحذف ، وإن شاء الله نحل أمثلة بطريقة التعويض .

مثال (١) :

حل نظام المعادلات الآتي ، وتحقق من صحة الحل .

س + ص + ٢ع = ٦

٢س − ص − ٣ع = −٥

٣س + ص − ع = ٢

الحل : ترتب المعادلات بحيث تكون المتغيرات في طرف والثوابت في طرف ونرقمها

س + ص + ٢ع = ٦ . . . . . . (١)

٢س − ص − ٣ع = −٥ . . . . . (٢)

٣س + ص − ع = ٢ . . . . . . (٣)

نختار أحد المتغيرات لنقوم بحذفه من النظام وليكن ص ، من المعادلتين ١ ، ٢

س + ص + ٢ع = ٦ . . . . (١)
٢س − ص − ٣ع = −٥ . . . . . (٢)
٣س − ع = ١ . . . . . . (٤)

نجمع المعادلتين وينتج معادلة جديدة ٤ .

نجمع المعادلتين ٢ ، ٣ وينتج لدينا معادلة جديدة ٥ .

٢س − ص − ٣ع = −٥ . . . . . (٢)
٣س + ص − ع = ٢ . . . . . . (٣)
٥س − ٤ع = −٣ . . . . . (٥)

لاحظ هنا أنه تم تحويل النظام إلى نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ٤ ، ٥

نقوم بحل المعادلتين ٤ ، ٥

٣س − ع = ١ . . . . (٤)
٥س − ٤ع = −٣ . . . . . . (٥)

بضرب المعادلة ٤ في (ـ ٤) لحذف المتغير ع ثم جمع المعادلتين

−٤ × (٣س − ع = ١) . . . (٤) ← −١٢س + ٤ع = −٤ . . . . . . (٤)
٥س − ٤ع = −٣ . . . . . (٥) ← ٥س − ٤ع = −٣ . . . . (٥)
−٧س = −٧ ← $\boxed{\text{س} = ١}$

نعوض قيمة س في معادلة ٤ أو معادلة ٥ لإيجاد قيمة ع ، ولتكن ٤ .

عند س = ١ ← ٣(١) − ع = ١ ← $\boxed{\text{ع} = ٢}$.

نعوض قيمتي س ، ع في معادلة ١ أو ٢ أو ٣ ، ولتكن ١ .

عند ع = ٢، س = ١ ← ١ + ص + ٢(٢) = ٦ ← $\boxed{\text{ص} = ١}$

حل النظام (س، ص، ع) = (١، ١، ٢) ثم نتحقق من صحة الحل .

مثال (٢) :

حل نظام المعادلات الآتي

س − ٣ص + ٣ع = −٤
٢س + ٣ص = ع − ١٥
٤س − ٣ص − ع = ١٩

- ترتب معادلات النظام ونرقم

س − ٣ص + ٣ع = −٤ ...... (١)
٢س + ٣ص − ع = −١٥ ...... (٢)
٤س − ٣ص − ع = ١٩ ...... (٣)

- من خلال النظر لمعادلات النظام نلاحظ أن أسهل متغير يمكن حذفه هو ص

- نجمع المعادلتين ١ ، ٢

س − ٣ص + ٣ع = −٤ ...... (١)
٢س + ٣ص − ع = −١٥ ...... (٢)

٣س + ٢ع = −١٩ ...... (٤)

- نجمع المعادلتين ٢ ، ٣

٢س + ٣ص − ع = −١٥ ...... (٢)
٤س − ٣ص − ع = ١٩ ...... (٣)

٦س − ٢ع = ٤ ...... (٥)

- نحل المعادلتين ٤ ، ٥ (نجمع مباشرة لحذف المتغير ع)

٣س + ٢ع = −١٩ ...... (٤)
٦س − ٢ع = ٤ ...... (٥)

٩س = −١٥ ← $\boxed{\text{س} = \frac{-5}{3}}$

- نعوض قيمة س في معادلة ٥ لإيجاد قيمة ع .

عند س = $\frac{-5}{3}$ ← ٦ $\left(\frac{-5}{3}\right)$ − ٢ع = ٤ ← $\boxed{\text{ع} = -7}$

- نعوض قيمتي س ، ع في معادلة ١ لإيجاد قيمة ص

عند

$$\text{س} = \frac{-٥}{٣} ، \text{ع} = -٧ \leftarrow \frac{-٥}{٣} - ٣\text{ص} - ٢١ = -٤ \leftarrow \boxed{\text{ص} = \frac{-٥٦}{٩}}$$

حل النظام $(\text{س}، \text{ص}، \text{ع}) = \left(\frac{-٥}{٣}، \frac{-٥٦}{٩}، -٧\right)$ ثم نتحقق من صحة الحل

مثال (٣) :

حل نظام المعادلات الآتي

$$\begin{array}{ll} \text{س} - ٢\text{ص} + \text{ع} = ١٥ & \text{س} - ٢\text{ص} + \text{ع} = ١٥ \cdots\cdots\cdots (١) \\ ٢\text{س} + ٣\text{ص} - ٣\text{ع} = ١ \quad \text{نرقم} & ٢\text{س} + ٣\text{ص} - ٣\text{ع} = ١ \cdots\cdots\cdots (٢) \\ ٤\text{س} + ١٠\text{ص} - ٥\text{ع} = -٣ & ٤\text{س} + ١٠\text{ص} - ٥\text{ع} = -٣ \cdots\cdots (٣) \end{array}$$

الحل :

- نختار المتغير س لحذفه لأن معامل س في المعادلة الأولى يساوي ١ .

تضرب المعادلة ١ في ـ ٢ ونجمع الناتج مع معادلة ٢

$$\begin{array}{l} -٢\text{س} + ٤\text{ص} - ٢\text{ع} = -٣٠ \cdots\cdots\cdots (١) \\ ٢\text{س} + ٣\text{ص} - ٣\text{ع} = ١ \cdots\cdots\cdots (٢) \\ \hline ٧\text{ص} - ٥\text{ع} = -٢٩ \cdots\cdots\cdots (٤) \end{array}$$

- تضرب المعادلة ١ في ـ ٤ ونجمع الناتج مع معادلة ٣

$$\begin{array}{l} -٤\text{س} + ٨\text{ص} - ٤\text{ع} = -٦٠ \cdots\cdots\cdots (١) \\ ٤\text{س} + ١٠\text{ص} - ٥\text{ع} = -٣ \cdots\cdots\cdots (٣) \\ \hline ١٨\text{ص} - ٩\text{ع} = -٦٣ \cdots\cdots\cdots (٥) \end{array}$$

- من المعادلتين ٤ ، ٥ نحذف المتغير ع ، – ٩ × م٤ ، ٥ × م٥

– ٦٣س + ٤٥ع = ٢٦١ . . . . (٤)

٩٠س – ٤٥ع = –٣١٥ . . . . (٥)

٢٧س = –٥٤ ← ← ← ← ص = –٢

- نعوض قيمة ص في معادلة ٤ ، لإيجاد قيمة ع .

عند ص = –٢ ← ٧(–٢) – ٥ع = –٢٩ ← ع = ٣

- نعوض قيمتي ص ، ع في معادلة ١ ، إيجاد قيمة س .

عند ص = –٢ ، ع = ٣ ← س – ٢(–٢) + (٣) = ١٥ ← س = ٨

حل النظام (س ، ص ، ع) = (٨ ، –٢ ، ٣) ثم نتحقق من صحة الحل

مثال (٤) :

حل نظام المعادلات الآتي

٤س = –٨ع	نرقم	٤س = –٨ع . . . . . . (١)
٣س – ٢ص + ع = ٠		٣س – ٢ص + ع = ٠ . . . . . . (٢)
–٢س + ص – ع = –١		–٢س + ص – ع = –١ . . . . . . (٣)

الحل : سوف نستخدم طريقة التعويض في الحل

- من معادلة ١ ، نقسم الطرفين على ٤ ← س = –٢ع . . . . . . (٤)

- نعوض قيمة س في معادلة ٢ ، ثم في معادلة ٣ .

٣(–٢ع) – ٢ص + ع = ٠ ← –٢ص – ٥ع = ٠ . . . . (٥)

–٢(–٢ع) + ص – ع = –١ ← ص + ٣ع = –١ . . . . (٦)

- نحل المعادلتين ٥ ، ٦ بطريقة الحذف (نحذف المتغير ص ٢ × ٣ ،)

−٢ص − ٥ع = ٠ . . . . . . (٥) ← −٢ص − ٥ع = ٠

٢ × (ص + ٣ع = −١) . . . . . . (٦) ← ٢ص + ٦ع = −٢

ع = −٢

- نعوض قيمة ع في معادلة ٦ لإيجاد قيمة ص .

ع = −٢ ← ص + ٣(−٢) = −١ ← ص = ٥

- نعوض قيمة ع في معادلة ٤ لإيجاد قيمة س .

ع = −٢ ← س = −٢(−٢) ← س = ٤

حل النظام (س، ص، ع) = (٤، ٥، −٢) ثم نتحقق من صحة الحل .

مثال (٤) : تفكير ناقد

النظام التالي مكون من معادلتين وثلاث متغيرات :

س + ٢ص + ٤ع = ٤

٢س + ٣ص + ع = ١٢

لو حاولنا حل هذا النظام

- نضرب المعادلة الثانية في ـ ٤ ع ونجمع المعادلتين

س + ٢ص + ٤ع = ٤ ← س + ٢ص + ٤ع = ٤

−٤ × (٢س + ٣ص + ع = ١٢) ← −٨س − ١٢ص − ٤ع = −٤٨

−٧س − ١٠ص = −٤٤

وبضرب المعادلة الناتجة ف ـ ١ ← ٧س + ١٠ص = ٤٤

نلاحظ أنه عند حل هذا النظام فإن الحل المشترك عبارة عن خط مستقيم .

مثال (٥) : حل نظام المعادلات الآتي :

س + ص + ع = ٣
٢س – ص – ٣ع = –٢
٣س + ٣ص + ٣ع = ٩

نرقم

س + ص + ع = ٣ ....(١)
٢س – ص – ٣ع = –٢ ....(٢)
٣س + ٣ص + ٣ع = ٩ ....(٣)

الحل : لاحظ أن معادلة ٣ ناتجة من ضرب معادلة ١ في ٣ ، لذلك لا يوجد حل للنظام

بصورة أخرى المستويان اللذان يمثلان المعادلتين ١ ، ٣ منطبقان ، والمستوى الذي يمثل معادلة ٢ قاطع لهما .

جبرياً : نضرب المعادلة ١ في – ٣ ونجمع الناتج لمعادلة ٣

–٣س – ٣ص – ٣ع = –٩ ....(١)
٣س + ٣ص + ٣ع = ٩ ....(٣)
____
٠ = ٠

المستويان منطبقان

نضرب المعادلة ١ في ٣ ونجمع الناتج لمعادلة ٢

٣س + ٣ص + ٣ع = ٩ ....(١)
٢س – ص – ٣ع = –٢ ....(٢)
____
٥س + ٢ص = ٧ ....(٤)

المستوى الذي يمثل المعادلة الثانية يقطع المستويين في المستقيم ٥س + ٢ص = ٧

مثال (٦) : حل نظام المعادلات الآتي :

٢س + ص – ع = ٤
س – ص + ع = ٥
٢س + ص – ع = ٧

نرقم

٢س + ص – ع = ٤ ....(١)
س – ص + ع = ٥ ....(٢)
٢س + ص – ع = ٧ ....(٣)

الحل : نجمع المعادلتين ١ ، ٢ لحذف المتغير ع نحصل على ٣س = ٩ ← س = ٣

نجمع المعادلتين ٢ ، ٣ لحذف المتغير ع نحصل على ٣س = ١٢ ← س = ٤

نضرب المعادلة ١ في – ١ ونجمع الناتج لمعادلة ٣ فنحصل على ← ٠ = ٣ مستحيل

نفهم من الخطوة الأخيرة أن المستوى الذي يمثل المعادلة الأولى يوازي المستوى الذي يمثل المعادلة الثالثة .

لذلك النظام لا يوجد له حل مشترك .

مسائل عملية على حل نظام مكون من ثلاث معادلات خطية

مثال (٧) :

ثلاثة أعداد مختلفة ، مجموعها يساوي ١٦ ، والأكبر يساوي مجموع العددين الآخرين ، وثلاثة أضعاف العدد الأصغر تزيد عن العدد الأكبر بمقدار واحد ، جد الأعداد الثلاثة .

الحل :

- لحل هذه المسألة نحول المتغيرات إلى رموز ، والمعلومات إلى معادلات .
- نفرض : العدد الأكبر س ، الأوسط ص ، الأصغر ع
- مجموعها يساوي ١٦ ← س + ص + ع = ١٦
- والأكبر يساوي مجموع العددين الآخرين ← س = ص + ع
- وثلاثة أضعاف العدد الأصغر تزيد عن العدد الأكبر بمقدار واحد
- إعادة صياغة : ثلاثة أضعاف العدد الأصغر تساوي العدد الأكبر زائد واحد

← ٣ع = س + ١

- نرتب المعادلات الناتجة ونرقمها

س + ص + ع = ١٦ . . . . (١)

س – ص – ع = ٠ . . . . . (٢)

س – ٣ع = ٧ . . . . (٣)

- نجمع المعادلتين ١ ، ٢ لحذف المتغير ص ← ٢س = ١٦ ← $\boxed{\text{س = ٨}}$
- نعوض قيمة س في معادلة ٣ لإيجاد قيمة ع

عند س = ٨ ← ٨ – ٣ع = –١ ← $\boxed{\text{ع = ٣}}$

- نعوض قيمة كل من س ، ع في معادلة ١ لإيجاد قيمة ص

عند س = ٨،ع = ٣ ← ٨ + ص + (٣) = ١٦ ← $\boxed{\text{ص = ٥}}$

- وبعد التحقق من صحة الحل / الأعداد هي من الأكبر للأصغر ٨ ، ٥ ، ٣ .

مثال (٨) :

مثلث فيه قياس الزاوية الثانية يساوي مثلي قياس الزاوية الأولى ، وقياس الزاوية الثالثة يزيد بمقدار ٣٠° على مجموع قياسي الزاويتين الأولى والثانية ، جد قياس كل من الزوايا الثلاث ، وتحقق من صحة الحل .

الحل :

- نفرض قياس الزاوية : الأولى س ، الثانية ص ، الثالثة ع
- مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠° ← س + ص + ع = ١٨٠°
- قياس الزاوية الثانية يساوي مثلي قياس الزاوية الأولى ← ص = ٢س
- قياس الزاوية الثالثة يزيد بمقدار ٣٠° على مجموع قياسي الزاويتين الأولى والثانية

إعادة صياغة :

قياس الزاوية الثالثة يساوي مجموع قياسي الزاويتين الأولى والثانية زائد ٣٠°

← ع = ص + س + ٣٠°

- نرتب المعادلات الناتجة ونرقمها

س + ص + ع = ١٨٠°..... (١)
٢س – ص = ٠ ..... (٢)
– س – ص + ع = ٣٠°..... (٣)

- من معادلة ٢ ← ص = ٢س .... (٤)
- نعوض معادلة ٤ في معادلة ١ ← ٣س + ع = ١٨٠°..... (٥)
- نعوض معادلة ٤ في معادلة ٣ ← –٣س + ع = ٣٠°..... (٦)
- بجمع المعادلتين ٥ ، ٦ ← ٢ع = ٢١٠° ← $\boxed{\text{ع = ١٠٥°}}$
- بتعويض قيمة ع في معادلة ٥ لإيجاد س

← ٣س + ١٠٥° = ١٨٠° ← $\boxed{\text{س = ٢٥°}}$

- بتعويض قيمة س في معادلة ٤ لإيجاد قيمة ص

← ص = ٢(٢٥°) ← $\boxed{\text{ص = ٥٠°}}$

- بعد التأكد من صحة الحل يكون حل النظام

س = ٢٥° ، ص = ٥٠° ، ع = ١٠٥°

ملاحظة :

انتبه دائماً للحقائق الرياضية في السؤال فهي تمثل معادلة وإن لم تذكر .

مثال (٩) :

مثلث محيطه ١٨ سم ، طول الضلع الأول يساوي مثلي طول الضلع الثالث ، وطول الضلع الثاني يزيد عن طول الضلع الثالث بمقدار ٢ سم ، جد أطوال أضلاع المثلث .

الحل :

- نفرض طول الضلع : الأول س ، الثاني ص ، الثالث ع
- مثلث محيطه ١٨ سم ← س + ص + ع = ١٨
- طول الضلع الأول يساوي مثلي طول الضلع الثالث ← س = ٢ ع
- وطول الضلع الثاني يزيد عن طول الضلع الثالث بمقدار ٢ سم
- إعادة صياغة وطول الضلع الثاني يساوي طول الضلع الثالث زائد ٢ سم

  ← ص = ع + ٢
- نرتب المعادلات الناتجة ونرقمها

س + ص + ع = ١٨ .... (١)

س – ٢ع = ٠ .... (٢)

ص – ع = ٢ ..... (٣)

- من معادلة ٢ ← س = ٢ع ..... (٤)
- نعوض معادلة ٤ في معادلة ١ ← ص + ٣ع = ١٨ ...... (٥)
- نضرب معادلة ٣ في – ١ ونجمع الناتج إلى معادلة ٥

  ← ٤ع = ١٦ ← **ع = ٤**
- نعوض ع في معادلة ٣ لنجد قيمة ص ← ص – ٤ = ٢ ← **ص = ٦**
- نعوض ع في معادلة ٤ لنجد قيمة س ← **س = ٨**

بعد التأكد من صحة الحل ، حل النظام س = ٨ ، ص = ٦ ، ع = ٤

١) اكتب نظاما من ثلاث معادلات خطية بثلاث متغيرات ، بحيث يكون حل النظام هو :

س = ٢ ، ص = −٣ ، ع = ٤

الحل : نختار أسهل نظام (يمكن كتابة عدد لا نهائي من الأنظمة) .

س + ص + ع = ٣ ....(١)

س − ص + ع = ٩ ....(٢)

س − ص − ع = ١ ....(٣)

---

٢) حل كلاً من أنظمة المعادلات الخطية الآتية ، ثم تحقق من صحة الحل :

أ) س − ص + ع = ٣ .....(١)

٢س + ص + ع = ٨ ....(٢)

٣س + ص − ع = ١ ....(٣)

الحل : سوف نستخدم الحل السريع لحل هذا النظام (نحذف المتغير ص)

- م١ + م٢ ← ٣س + ٢ع = ١١ ......(٥)
- م١ + م٣ ← ٤س = ٤ ← س = ١ .....(٦)
- نعوض قيمة س في معادلة ٥ لإيجاد قيمة ع

س = ١ ← ٣(١) + ٢ع = ١١ ← ع = ٤

- نعوض قيمتي س ، ع في معادلة ١ لإيجاد قيمة ص

س = ١، ع = ٤ ← ١ − ص + ٤ = ٣ ← ص = ٢

بعد التأكد من صحة الحل ، حل النظام س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٤

ب) أ + ب + جـ = ١ ....(١)

− ٢أ + ٢ب + ٣جـ = ٢٠ .....(٢)

٢أ − ٢ب − جـ = −١٦ .....(٣)

الحل : نحذف المتغير أ

- ٢ × م١ + م٢ ← ٤ب + ٥جـ = ٢٢ ......(٤)
- −٢ × م١ + م٣ ← −٤ب − ٣جـ = −١٨ ......(٥)
- نحذف ب م٤ + م٥ ← ٢جـ = ٤ ← $\boxed{\text{جـ = ٢}}$
- نعوض قيمة جـ في معادلة ٤ إيجاد قيمة ب

  جـ = ٢ ← ٤ب + ٥(٢) = ٢٢ ← $\boxed{\text{ب = ٣}}$
- نعوض قيمتي جـ ، ب في معادلة ١ إيجاد قيمة أ

  ب = ٣، جـ = ٢ ← أ + ٣ + ٢ = ١ ← $\boxed{\text{أ = −٤}}$

بعد التأكد من صحة الحل ، حل النظام أ = −٤ ، ب = ٣ ، جـ = ٢

جـ) $\frac{\text{س}}{٢} + ٣\text{ع} = ١٢$

$\text{ص} - \frac{\text{ع}}{٢} = \frac{٥}{٢}$

$\frac{\text{ص}}{٢} - \frac{\text{س}}{٣} = ١$

الحل :

نتخلص من المقامات عن طريق الضرب في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات كل معادلة .

٢ × م١ ، ٢ × م٢ ، ٦ × م٣

س + ٦ع = ٢٤ . . . . (١)

٢ص − ع = ٥ . . . . (٢)

٣ص − ٢س = ٦ . . . . (٣)

- حذف المتغير ع م١ + ٦ × م٢ ← س + ١٢ص = ٥٤ . . . . . . (٤)

- حذف المتغير س م٣ + ٢ × م٤ ← ٩ص = ٣٨ ← $\boxed{ص = \frac{٣٨}{٩}}$

- نعوض قيمة ص في معادلة ٤ إيجاد قيمة س

س + ١٢ $\left(\frac{٣٨}{٩}\right)$ = ٥٤ ← $\boxed{س = \frac{١٠}{٣}}$

- نعوض قيمة س في معادلة ١ إيجاد قيمة ع

$\frac{١٠}{٣}$ + ٦ع = ٢٤ ← $\boxed{ع = \frac{٣١}{٩}}$

بعد التأكد من صحة الحل ، حل النظام س = $\frac{١٠}{٣}$ ، ص = $\frac{٣٨}{٩}$ ، ع = $\frac{٣١}{٩}$

ء) ٢ص + ع = ٣(١ − س)

س − ٣ص + ع = ٤

− ٢(٣س + ٢ص + ع) = ١

الحل : نفك الأقواس ونرتب النظام .

٣س + ٢ص + ع = ٣ . . . . . . (١)

س − ٣ص + ع = ٤ . . . . . . (٢)

− ٦س − ٤ص − ٢ع = ١ . . . . . (٣)

- تحذف ع −١ × م١ + م٢ ← ٢س − ٥ص = ١ ....(٤)
- تحذف ع ٢ × م١ + م٢ ← ٠ = ١ ....(٤) مستحيل

النظام ليس له حل ، وتفسير ذلك : المستوى الذي تمثله معادلة ١ يوازي المستوى الذي تمثله معادلة ٣ .

---

٣) عدد مكون من ثلاث منازل ، مجموع أرقام منازله ١٢ ، رقم منزلة العشرات يقل عن رقم منزلة المئات بمقدار ٢ ، ورقم منزلة الآحاد يقل عن مجموع رقمي المنزلتين الأخريين بمقدار ٤ ، ما هذا العدد ؟

الحل :

- نفرض رقم منزلة : الآحاد س ، العشرات ص ، المئات ع
- مجموع أرقام منازله ١٢ ← س + ص + ع = ١٢
- رقم منزلة العشرات يقل عن رقم منزلة المئات بمقدار ٢

إعادة صياغة رقم منزلة العشرات يساوي رقم منزلة المئات ناقص ٢

← ص = ع − ٢

- رقم منزلة الآحاد يقل عن مجموع رقمي المنزلتين الأخريين بمقدار ٤

إعادة صياغة رقم منزلة الآحاد يساوي مجموع رقمي المنزلتين الأخريين ناقص ٤

← س = ص + ع − ٤

- نرتب المعادلات ونرقم

س + ص + ع = ١٢ ....(١)
ص − ع = −٢ ....(٢)
س − ص − ع = −٤ ....(٣)

- تحذف ع م١ + م٢ ← س + ٢ص = ١٠ ....(٤)

- نحذف ع م١ + م٢ ← ٢س = ٨ ← $\boxed{\text{س} = ٤}$

نعوض قيمة س في معادلة ٤ لإيجاد قيمة ص

عند س = ٤ ← ٤ + ٢ص = ١٠ ← $\boxed{\text{ص} = ٣}$

نعوض قيمة ص في معادلة ٢ لإيجاد قيمة ع

عند ص = ٣ ← ٣ − ع = −٢ ← $\boxed{\text{ع} = ٥}$

بعد التأكد من صحة الحل ، حل النظام س = ٤ ، ص = ٣ ، ع = ٥

إذا العدد هو ٤٣٥

---

٤) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث : (٦،٠) ، (−١،−١) ، (−٢،٠)

الحل :

معادلة الدائرة هي س٢ + ص٢ + أس + ب‌ص + جـ = ٠ : أ، ب، جـ ∈ ح

نعوض النقط في المعادلة

(٦،٠) ← ٣٦ + ٠ + ٦أ + ٠ + جـ = ٠ ← ٦أ + جـ = −٣٦ ......(١)

(−١،−١) ← ١ + ١ − أ − ب + جـ = ٠ ← −أ − ب + جـ = −٢ ......(٢)

(−٢،٠) ← ٤ + ٠ − ٢أ + ٠ + جـ = ٠ ← −٢أ + جـ = −٤ ......(٣)

الناتج ثلاث معادلات خطية بثلاث متغيرات ، نحل النظام

٦أ + جـ = −٣٦ ......(١)
−أ − ب + جـ = −٢ ......(٢)
−٢أ + جـ = −٤ ......(٣)

- نحذف أ ← م١ + ٣ × م٣ ← ٤جـ = −٤٨ ← $\boxed{\text{جـ} = -١٢}$ ......(٤)

- نحذف أ ← −٢ × م١ + م٣ ← ٢ب − جـ = ٤ ......(٥)

- نعوض قيمة جـ في معادلة ٥ لإيجاد قيمة أ

عند جـ = −١٢ ← ٢أ − (−١٢) = ٤ ← $\boxed{\text{أ = −٤}}$

- نعوض قيمتي جـ ، أ في معادلة ٢ لإيجاد قيمة ب

عند أ = −٤، جـ = −١٢ ← −(−٤) − ب + (−١٢) = −٢ ← $\boxed{\text{ب = −٦}}$

بعد التأكد من صحة الحل ، حل النظام أ = −٤ ، ب = −٦ ، جـ = −١٢

إذا معادلة الدائرة هي س^{٢} + ص^{٢} − ٤س − ٦ص − ١٢ = ٠

---

٥) بين أن نظام المعادلات الآتي ليس له حل :

٢س − ص + ع = ٢ ٢س − ص + ع = ٢ ....(١)

٣س − ٢ص − ع = ٠ نرتب ٣س − ٢ص − ع = ٠ ....(٢)

٥س − ٣ص + ٢ = ٠ ٥س − ٣ص = −٢ ....(٣)

الحل :

- نحذف ع ← م$_{١}$ + م$_{٢}$ ← ٥س − ٣ص = ٢ ......(٤)
- نحذف س ← −١ × م$_{٣}$ + م$_{٤}$ ← ٠ = ٤ مستحيل

إذا النظام لا يوجد له حل

سؤال : بيانياً

ما العلاقة بين المستقيم الناتج من تقاطع المستويين اللذان يمثلان المعادلتين ١ ، ٢ والمستوى الذي يمثل المعادلة الثالثة .

حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية

Solving of a System of a Linear and a Quadratic Equations

الصورة العامة للمعادلة التربيعية بمتغيرين

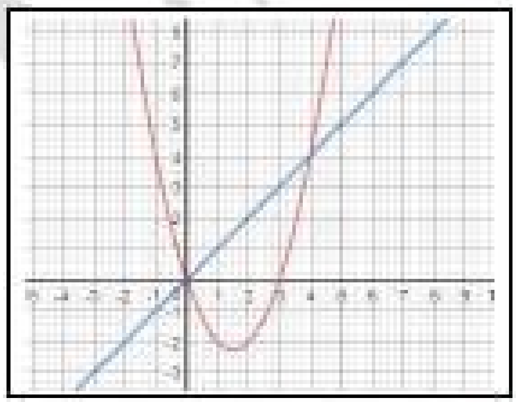
أس^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س ص + ء س + هـ ص + و = ٠ : أ ، ب ، جـ ≠ ٠ معاً

أمثلة

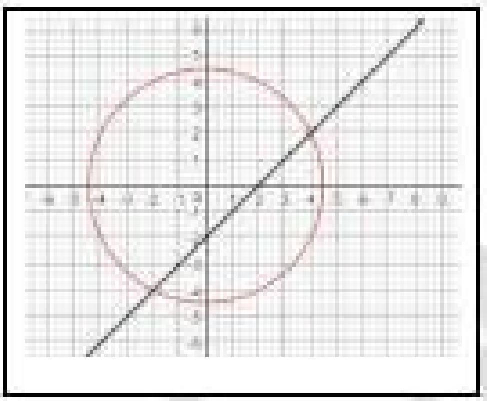
١) ص – س^{٢} + ٣س = ٠   ٢) ص^{٢} – س^{٢} + ٣س = ٠

٣) ص^{٢} + س^{٢} = ٢٥   ٤) ص س = ٤٨

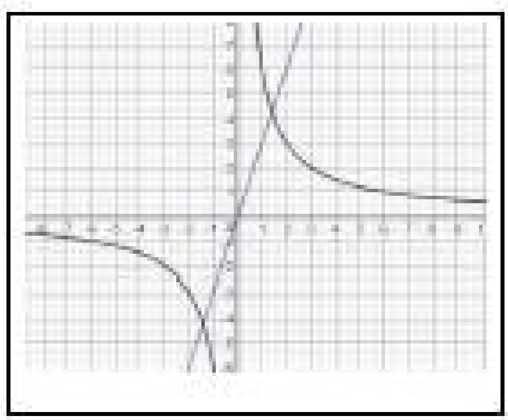
- الأشكال التالية تبين العلاقة بين معادلة خطية ومعادلة تربيعية . (بيانياً)



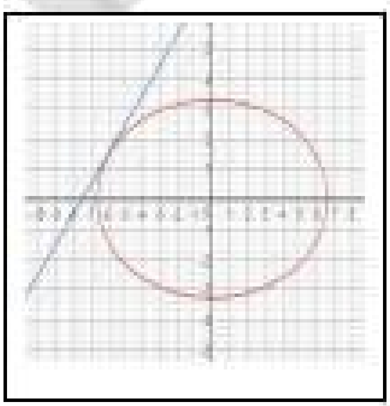
شكل ١



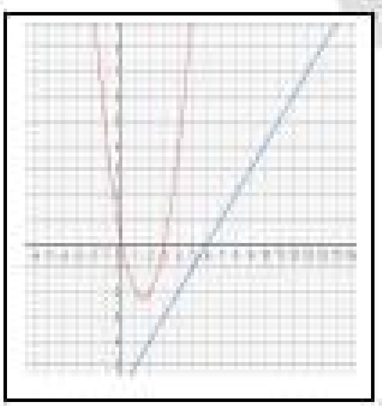
شكل ٢



شكل ٣



شكل ٤



شكل ٥

لاحظ في الأشكال ١ ، ٢ ، ٣ أن الخط المستقيم يقطع منحنى العلاقة التربيعية في نقطتين ، بينما في شكل ٤ يقطع منحنى العلاقة في نقطة واحدة فقط ، لكنه في الشكل ٥ لا يقطع منحنى العلاقة نهائياً .

لذلك حين حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية يكون الناتج إحدى الحالات السابقة .

ولحل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية نتبع الخطوات التالية :

١) نرقم معادلات النظام

٢) من المعادلة الخطية نكتب متغير بدلالة الأخر ونرقم المعادلة الناتجة ٣

٣) نعوض معادلة ٣ في المعادلة التربيعية (نفك الأقواس ونرتب)

٤) من الخطوة السابقة نحل المعادلة التربيعية الناتجة (إن أمكن) لإيجاد قيمة المتغير

٥) نعوض قيمة (قيم) المتغير الناتجة من الخطوة السابقة في معادلة ٣ لإيجاد قيمة المتغير الأخر .

٦) نتحقق من صحة الحل .

مثال (١) جد حل كل من أنظمة المعادلات الآتية ، ثم تحقق من صحة الحل .

١) ص − ٢س = −٤ ← ص − ٢س = −٤ . . . . (١)

ص = س ٢ − ٣س ص = س ٢ − ٣س . . . (٢)

الحل :

- من معادلة ١ نكتب ص بدلالة س ← ص = ٢س − ٤ . . . . (٣)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢

٢س − ٤ = س ٢ − ٣س نرتب المعادلة ونصفرها س ٢ − ٥س + ٤ = ٠

- نحلل س ٢ − ٥س + ٤ = ٠ ← (س − ١)(س − ٤) = ٠

إما س = ١ أو س = ٤

- نعوض قيم س في معادلة ٣ لإيجاد قيم ص

عند س = ١ ← ص = ٢(١) − ٤ ← ص = −٢ ← (١، −٢)

عند س = ٤ ← ص = ٢(٤) − ٤ ← ص = ٤ ← (٤، ٤)

بعد التحقق من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(١، −٢) ، (٤، ٤)}

---

٢) س − ص = ٢ ← س − ص = ٢ ....(١)

س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ .....(٢)

الحل :

- من معادلة ١ نكتب ص بدلالة س ← س = ص + ٢ ....(٣)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ (ص + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٢٠
- نفك القوس ونرتب المعادلة ونصفرها

ص^{٢} + ٤ص + ٤ + ص^{٢} = ٢٠ ← ٢ص^{٢} + ٤ص − ١٦ = ٠

- نقسم المعادلة الناتجة على ٢ ونحللها

ص^{٢} + ٢ص − ٨ = ٠ ← (ص + ٤)(ص − ٢) = ٠

إما ص = −٤ أو ص = ٢

- نعوض قيم ص في معادلة ٣ لإيجاد قيم س

عند ص = −٤ ← س = −٤ + ٢ ← س = −٢ ← (−٢، −٤)

عند ص = ٢ ← س = ٢ + ٢ ← س = ٤ ← (٤، ٢)

بعد التحقق من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(−٢، −٤) ، (٤، ٢)}

٣) س٢ + ص٢ = ١٧ ← س٢ + ص٢ = ١٧ .....(١)
س = ٥ص − ١ س = ٥ص − ١ .....(٢)

الحل :

- نعوض معادلة ٢ في معادلة ١ (٥ص − ١)٢ + ص٢ = ١٧
- نفك القوس ونرتب المعادلة ونصفرها

٢٥ص٢ − ١٠ص + ١ + ص٢ = ١٧ ← ٢٦ص٢ − ١٠ص − ١٦ = ٠

- نقسم المعادلة الناتجة على ٢ ونحللها

١٣ص٢ − ٥ص − ٨ = ٠ ← (١٣ص + ٨)(ص − ١) = ٠

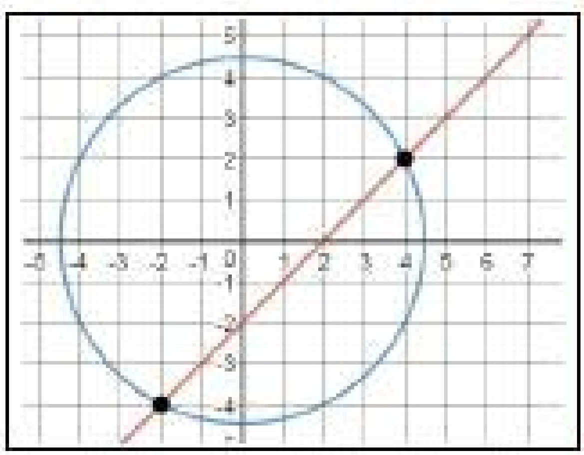
إما ص = $\frac{-٨}{١٣}$ أو ص = ١

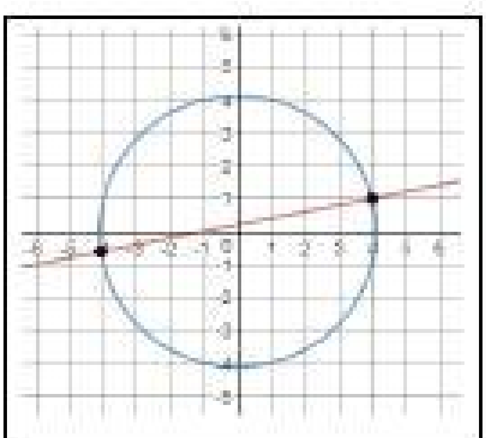
- نعوض قيم ص في معادلة ٢ لإيجاد قيم س

عند ص = $\frac{-٨}{١٣}$ ← س = ٥ $\left(\frac{-٨}{١٣}\right)$ − ١ ← س = $\frac{-٥٣}{١٣}$ ← $\boxed{\left(\frac{-٥٣}{١٣} ، \frac{-٨}{١٣}\right)}$

عند ص = ١ ← س = ٥(١) − ١ ← س = ٤ ← $\boxed{(٤ ، ١)}$

بعد التحقق من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي $\left\{ \left(\frac{-٥٣}{١٣} ، \frac{-٨}{١٣}\right) ، (٤ ، ١) \right\}$





٤) ٣س − ص = ٠ ← ٣س − ص = ٠ . . . . . (١)
س ص = ٤٨ ← س ص = ٤٨ . . . . . (٢)

الحل :

- من معادلة ١ نكتب ص بدلالة س ← ص = ٣س . . . . (٣)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ س (٣س) = ٤٨
- نفك القوس ونجد قيم س ٣س^{٢} = ٤٨ ← س^{٢} = ١٦ ← س = ±٤
- نعوض قيم س في معادلة ٣ لإيجاد قيم ص

عند س = ٤ ← ص = ٣(٤) ← ص = ١٢ ← (٤، ١٢)

عند س = −٤ ← ص = ٣(−٤) ← ص = −١٢ ← (−٤، −١٢)

بعد التحقق من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(٤، ١٢) ، (−٤، −١٢)}

---

٥) ص − س = ٢ ← ص − س = ٢ . . . . (١)
س^{٢} + س ص − ٤ = ٠ ← س^{٢} + س ص − ٤ = ٠ . . . . . . (٢)

الحل :

- من معادلة ١ نكتب ص بدلالة س ← ص = س + ٢ . . . . (٣)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ س^{٢} + س(س + ٢) − ٤ = ٠
- نفك الأقواس ونرتب

س^{٢} + س^{٢} + ٢س − ٤ = ٠ ← ٢س^{٢} + ٢س − ٤ = ٠

- نقسم المعادلة على ٢ ثم نحلل

س^{٢} + س − ٢ = ٠ ← (س + ٢)(س − ١) = ٠

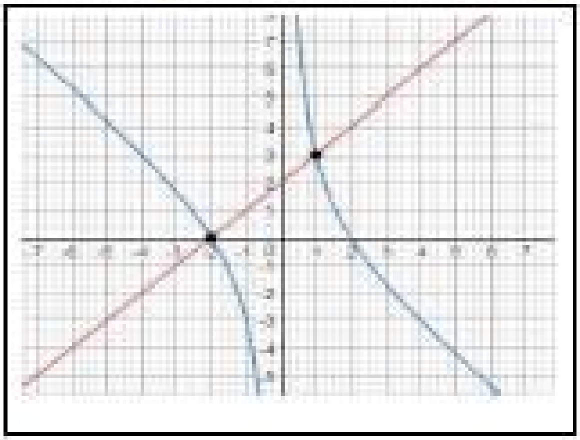
إما س = −٢ أو س = ١

عند س = −٢ ← ص = −٢ + ٢ ← ص = ٠ ← (−٢ ، ٠)

عند س = ١ ← ص = ١ + ٢ ← ص = ٣ ← (١ ، ٣)

بعد التحقق من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(−٢ ، ٠) ، (١ ، ٣)}

التفسير البياني :



---

٦) ص = $س^{٢}$ − ٣س − ٨ ← ص = $س^{٢}$ − ٣س − ٨ ....(١)
ص = س − ٣ ص = س − ٣ ....(٢)

الحل :

- نعوض معادلة ٢ في معادلة ١ ← س − ٣ = $س^{٢}$ − ٣س − ٨
- نرتب المعادلة ونحللها $س^{٢}$ − ٤س − ٥ = ٠ ← (س − ٥)(س + ١) = ٠

إما س = ٥ أو س = −١

عند س = ٥ ← ص = ٥ − ٣ ← ص = ٢ ← (٥ ، ٢)

عند س = −١ ← ص = −١ − ٣ ← ص = −٤ ← (−١ ، −٤)

بعد التحقق من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(٥ ، ٢) ، (−١ ، −٤)}

مثال (٢) :

عددان موجبان ، يزيد الثاني عن الأول بمقدار ٥ ، والفرق بين مربعيهما يساوي ٤٥ ، فما العددان ؟

الحل :

- نفرض العدد : الأول س   الثاني ص
- يزيد الثاني عن الأول بمقدار ٥ ← ص − س = ٥ ......(١)
- والفرق بين مربعيهما يساوي ٤٥ ← ص^{٢} − س^{٢} = ٤٥ .....(٢)

لاحظ أن ← س^{٢} − ص^{٢} = ٤٥ تعبير خاطئ حسب الفرض

- من معادلة ١ نكتب ص بدلالة س ← ص = س + ٥ ......(٣)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ← (س + ٥)^{٢} − س^{٢} = ٤٥
- نفك القوس ونرتب

← س^{٢} + ١٠س + ٢٥ − س^{٢} = ٤٥ ← ١٠س = ٢٠ ← $\boxed{\text{س = ٢}}$

- نعوض قيمة س في معادلة ٣ لإيجاد قيمة ص

عند س = ٢ ← ص = ٢ + ٥ ← ص = ٧ ← $\boxed{\text{(٢،٧)}}$

العددان هما ٢ ، ٧

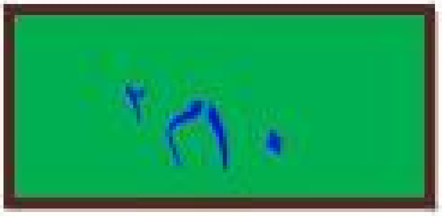
ملاحظة : عند تعويض قيمة س في معادلة ٢

س = ٢ ← ص^{٢} − (٢)^{٢} = ٤٥ ← ص = ±٧

لكن من السؤال س ، ص عددان موجبان ، إذا فقط ص = ٧

مثال (٣) :

حوض للأزهار مستطيل الشكل ، محيطه يساوي ١٤ م ، إذا كانت مساحته ١٠ م^{٢} ، فجد بعديه .



الحل :

نفرض بعدي الحوض س ، ص (الشكل)

- محيط المستطيل = ٢ × البعد الأول + ٢ × البعد الثاني

٢س + ٢ص = ١٤ ← س + ص = ٧ . . . . . (١)

- مساحة المستطيل = البعد الأول × البعد الثاني

س ص = ١٠ . . . . . . (٢)

- من معادلة ١ نكتب س بدلالة ص   س = ٧ – ص . . . . . (٣)

- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ونفك الأقواس ونرتب

(٧ – ص) ص = ١٠ ← ٧ص – ص^{٢} – ١٠ = ٠ ← ص^{٢} – ٧ص + ١٠ = ٠

نحلل المعادلة ص^{٢} – ٧ص + ١٠ = ٠ ← (ص – ٢)(ص – ٥) = ٠

إما ص = ٢ أو س = ٥

البعد الأول ٢ م ، البعد الثاني ٥ م ،،، البعد الأول ٥ م ، البعد الثاني ٢ م

أي أن بعدي الحوض هما ٢ م ، ٥ م

مثال (٤) :

عددان ، الفرق بينهما ٦ ، ومجموع مقلوبيهما يساوي $\frac{٥}{٨}$ ، فما العددان ؟

الحل : ((لاحظ أن أي من العددين لا يساوي الصفر))

- نفرض العدد : الأول س الثاني ص
- الفرق بينهما ٦ ← $س - ص = ٦ \ldots\ldots (١)$
- مجموع مقلوبيهما يساوي $\frac{٥}{٨}$ ← $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{٥}{٨} \ldots\ldots (٢)$
- نضرب معادلة ٢ في (م . م . أ) للمقامات ← ٨س ص فتصبح المعادلة على الصورة ← $٨ص + ٨س = ٥س ص \ldots\ldots (٢)$
- من معادلة ١ نكتب س بدلالة ص ← $س = ص + ٦ \ldots\ldots (٣)$
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢

$$\leftarrow ٨ص + ٨(ص + ٦) = (ص + ٦)٥ص$$

- نفك الأقواس ← $٨ص + ٨ص + ٤٨ = ٥ص^{٢} + ٣٠ص$
- نرتب ونحلل

$$٥ص^{٢} + ١٤ص - ٤٨ = ٠ \leftarrow (٥ص + ٢٤)(ص - ٢) = ٠$$

إما $ص = \frac{-٢٤}{٥}$ أو $ص = ٢$

عند $ص = \frac{-٢٤}{٥} \leftarrow س = \frac{-٢٤}{٥} + ٦ \leftarrow س = \frac{٦}{٥} \leftarrow \boxed{\left(\frac{٦}{٥} ، \frac{-٢٤}{٥}\right)}$

عند $ص = ٢ \leftarrow س = ٢ + ٦ \leftarrow س = ٨ \leftarrow \boxed{(٨ ، ٢)}$

بعد التحقق من صحة الحل ، العددان هما $\left\{\left(\frac{٦}{٥} ، \frac{-٢٤}{٥}\right) ، (٨ ، ٢)\right\}$

الأسئلة

١) جد حل كل من أنظمة المعادلات الآتية ، ثم تحقق من صحة الحل :

أ) س + ص = ٩ ← س + ص = ٩ ....(١)

$\frac{٢}{س} + \frac{٢}{ص} = ١$ ، (س ≠ ٠، ص ≠ ٠) ← $\frac{٢}{س} + \frac{٢}{ص} = ١$ ....(٢)

الحل :

- من معادلة ١ نكتب ص بدلالة س ← ص = ٩ − س ....(٣)
- نضرب معادلة ٢ في س ص ← ٢ص + ٢س = س ص ....(٢)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ← ٢(٩ − س) + ٢س = س(٩ − س)
- نفك الأقواس ونرتب

← ١٨ − ٢س + ٢س = ٩س − $س^٢$ ← $س^٢$ − ٩س + ١٨ = ٠

- نحلل المعادلة $س^٢$ − ٩س + ١٨ = ٠ ← (س − ٣)(س − ٦) = ٠

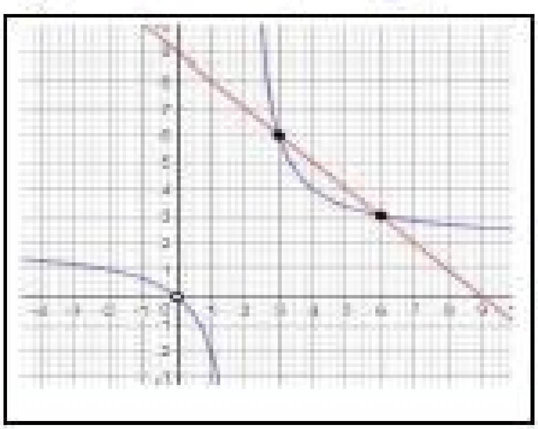
إما س = ٣ أو س = ٦

- نعوض قيم س في معادلة ٣ لإيجاد قيم ص

عند س = ٣ ← ص = ٩ − ٣ ← ص = ٦ ← $\boxed{(٣،٦)}$

عند س = ٦ ← ص = ٩ − ٦ ← ص = ٣ ← $\boxed{(٦،٣)}$

بعد التحقق من صحة الحل ، مجموعة حل النظام {(٣،٦) ، (٦،٣)}



ب) $ص = س - ٢$ ← $ص = س - ٢ \dots (١)$

$ص = س^{٢} - ٦س + ١٠$ ← $ص = س^{٢} - ٦س + ١٠ \dots (٢)$

الحل :

- نعوض معادلة ١ في معادلة ٢ ← $س - ٢ = س^{٢} - ٦س + ١٠$
- نرتب ونحلل ← $س^{٢} - ٧س + ١٢ = ٠$ ← $(س - ٣)(س - ٤) = ٠$

إما $س = ٣$ أو $س = ٤$

- نعوض قيم س في معادلة ١ لإيجاد قيم ص

عند $س = ٣$ ← $ص = ٣ - ٢$ ← $ص = ١$ ← $\boxed{(٣،١)}$

عند $س = ٤$ ← $ص = ٤ - ٢$ ← $ص = ٢$ ← $\boxed{(٤،٢)}$

بعد التحقق من صحة الحل ، مجموعة حل النظام $\{(٣،١) \ ، \ (٤،٢)\}$

جـ) $٣س^{٢} - ٥ص^{٢} = ٣٠$ ← $٣س^{٢} - ٥ص^{٢} = ٣٠ \dots (١)$

$ص - س = ٢$ ← $ص - س = ٢ \dots (٢)$

الحل :

- من معادلة ٢ نكتب ص بدلالة س ← $ص = س + ٢ \dots (٣)$
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ١ ← $٣س^{٢} - ٥(س + ٢)^{٢} = ٣٠$
- نفك الأقواس ونرتب

$٣س^{٢} - ٥(س^{٢} + ٤س + ٤) = ٣٠$ ← $٣س^{٢} - ٥س^{٢} - ٢٠س - ٢٠ = ٣٠$

$-٢س^{٢} - ٢٠س - ٥٠ = ٠ ، (\div -٢)$ ← $س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠$

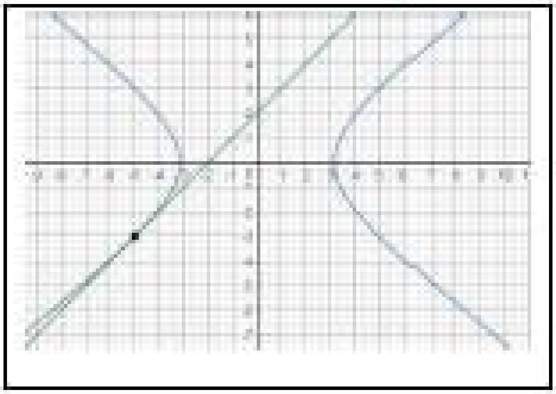
- نحلل $س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠$ ← $(س - ٥)(س - ٥) = ٠$

- إذا ص = −٥ ، نعوض قيمة س في معادلة ٣
- عند ص = −٥

← س = −٥ + ٢ ← س = −٣ ← (−٥، −٣)

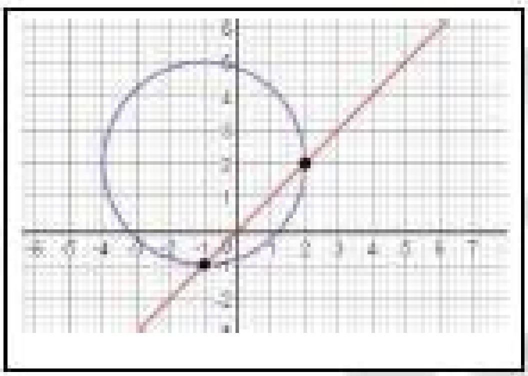
بعد التحقق من صحة الحل ، مجموعة حل النظام {(−٥، −٣)}

ملاحظة : إذا تم تعويض ص = −٥ في المعادلة ١ نحصل على س = ±٣ ، أي يوجد حلان للنظام عند ص = −٥ وهذا مستحيل لذلك عليك التعويض مرة أخرى في معادلة ٣ لإيجاد الحل الصحيح . (أنظر التمثيل البياني للنظام) .



٢) مثل حل نظام المعادلات الآتي بيانيا :

(س + ١)^٢ + (ص − ٢)^٢ = ٩
ص = س



الحل : نعوض المعادلة الثانية في الأولى

(س + ١)^٢ + (س − ٢)^٢ = ٩

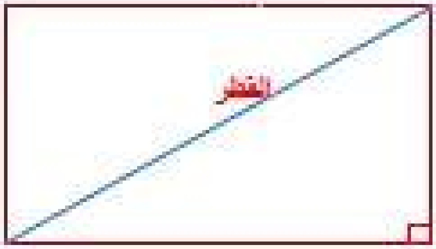
نفك الأقواس ونرتب ونحلل

س^٢ + ٢س + ١ + س^٢ − ٤س + ٤ = ٩
٢س^٢ − ٢س − ٤ = ٠ ، (÷ ٢) ← س^٢ − س − ٢ = ٠
(س − ٢)(س + ١) = ٠ ← س = ٢ ، س = −١

مجموعة حل النظام هي {(٢، ٢) ، (−١، −١)} (أنظر الشكل أعلاه) .

سليمان دلدوم أبو هيه

٣) مستطيل ، مجموع بعديه ١٧ سم ، وطول قطره يساوي ١٣ سم ، جد بعديه .



الحل :

- نفرض بعدي المستطيل س،ص
- مجموع بعديه ١٧ سم ← س + ص = ١٧
- وطول قطره يساوي ١٣ سم

مربع طول القطر = مجموع مربعي بعديه ((مبرهنة فيثاغورث))

← س^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩

نحل النظام س + ص = ١٧ . . . . (١)

س^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩ . . . (٢)

- من معادلة ١ نكتب س بدلالة ص ← س = ١٧ − ص، . . . (٣)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ، ونفك الأقواس ونرتب ونحل .

(١٧ − ص)^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩ ← ٢٨٩ − ٣٤ص + ص^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩

٢ص^{٢} − ٣٤ص + ١٢٠ = ٠،(÷ ٢) ← ص^{٢} − ١٧ص + ٦٠ = ٠

(ص − ٥)(ص − ١٢) = ٠ ←←←← ص = ٥،ص = ١٢

عند ص = ٥ ← س = ١٧ − ٥ ← س = ١٢

عند ص = ١٢ ← س = ١٧ − ١٢ ← س = ٥

إذا أبعاد المستطيل ٥ سم ، ١٢ سم .

---

٤) جد نقاط تقاطع الدائرة ، التي مركزها نقطة الأصل ، ونصف قطرها ٣ وحدات ، مع المستقيم الذي معادلته ص = ٣ − س .

الحل :

- معادلة الدائرة س ٢ + ص ٢ = ٩ . . . (١)
- معادلة المستقيم ص = ٣ − س. . . (٢)
- نعوض معادلة ٢ في معادلة ١ ، ثم نفك الأقواس ونرتب ونحل

س ٢ + (٣ − س) ٢ = ٩ ← س ٢ + ٩ − ٦س + س ٢ = ٩

٢س ٢ − ٦س = ٠،(÷ ٢) ← س ٢ − ٣س = ٠

(س)(س − ٣) = ٠ ← ← س = ٠،س = ٣

عند س = ٠ ← ص = ٣ − س ← ص = ٣ ← $\boxed{(٠،٣)}$

عند س = ٣ ← ص = ٣ − س ← ص = ٠ ← $\boxed{(٣،٠)}$

إذا نقاط التقاطع هي {(٠،٣) ، (٣،٠)}

---

٥) عددان موجبان مجموعهما ١٠ ، ومجموع مربعيهما ٥٨ ، فما العددان ؟

الحل :

- نفرض العدد : الأول س ، الثاني ص
- مجموعهما ١٠ ← س + ص = ١٠ . . . . (١)
- مجموع مربعيهما ٥٨ ← س ٢ + ص ٢ = ٥٨ . . . . (٢)
- من معادلة ١ نكتب س بدلالة ص ← س = ١٠ − ص. . . . (٣)

- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ، ونفك الأقواس ونرتب ونحل .

(١٠ – ص)^{٢} + ص^{٢} = ٥٨ ← ١٠٠ – ٢٠ص + ص^{٢} + ص^{٢} = ٥٨

٢ص^{٢} – ٢٠ص + ٤٢ = ٠ ،(÷ ٢) ← ص^{٢} – ١٠ص + ٢١ = ٠

(ص – ٣)(ص – ٧) = ٠ ← ص = ٣، ص = ٧

عند ص = ٣ ← س = ١٠ – ص ← س = ٧ ← $\boxed{(٧،٣)}$

عند ص = ٧ ← س = ١٠ – ص ← س = ٣ ← $\boxed{(٣،٧)}$

العددان هما ٣ ، ٧

طريقة ثانية للحل :

نفرض العدد الأول س ← الثاني ١٠ – س

مجموع مربعيهما ٥٨ ← (١٠ – س)^{٢} + س^{٢} = ٥٨

(١٠ – س)^{٢} + س^{٢} = ٥٨ ← ١٠٠ – ٢٠س + س^{٢} + س^{٢} = ٥٨

٢س^{٢} – ٢٠س + ٤٢ = ٠ ،(÷ ٢) ← س^{٢} – ١٠س + ٢١ = ٠

(س – ٣)(س – ٧) = ٠ ← س = ٣، س = ٧

الأول س = ٣ ← الثاني ١٠ – س ← ٧

الأول س = ٧ ← الثاني ١٠ – س ← ٣

العددان هما ٣ ، ٧

حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين

Solving of a System of tow Quadratic Equations

تذكر أن الصورة العامة للمعادلة التربيعية بمتغيرين هي :

أس^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س ص + ء س + هـ ص + و = ٠ : أ ، ب ، جـ ≠ ٠ معاً

لحل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين نستخدم الطرق التي تعلمناها سابقاً (الحذف ، التعويض ، التمثيل البياني) ، لكن هنا يمكننا حذف الحد الثابت إن لم نستطع حذف أي من المتغيرات . ((مع ملاحظة أن عدد حلول هذا النظام ٤ على الأكثر))

مثال (١) : حل كلا من أنظمة المعادلات التالية ، ثم تحقق من صحة الحل :

١) ٤س^{٢} − ٣ص^{٢} = ١٣ ....(١)
٣س^{٢} + ٢ص^{٢} = ١٤ ....(٢)

الحل : باستخدام طريقة الحذف (نحذف المتغير ص)

٢ × م١ ← ٨س^{٢} − ٦ص^{٢} = ٢٦ +
٣ × م٢ ← ٩س^{٢} + ٦ص^{٢} = ٤٢

١٧س^{٢} = ٦٨ ← (÷ ١٧)
س^{٢} = ٤ ← ← س = ±٢

- نعوض قيم س في أي من المعادلتين لإيجاد قيم ص ((نختار معادلة ٢))

عند س = ٢ ← ٣(٢)^{٢} + ٢ص^{٢} = ١٤ ← ص^{٢} = ١ ← ص = ±١ ← (٢، ±١)

عند س = −٢ ← ٣(−٢)^{٢} + ٢ص^{٢} = ١٤ ← ص^{٢} = ١ ← ص = ±١ ← (−٢، ±١)

مجموعة حل النظام هي : {(٢،١)، (٢،−١)، (−٢،١)، (−٢،−١)}

أو {(٢،±١)، (−٢،±١)}

ب)   س² + ص² = ٤ ....(١)

س² − ٢ص = ٤ ....(٢)

الحل : باستخدام طريقة الحذف (نحذف المتغير س)

س² + ص² = ٤

−١×م٢ ← − س² + ٢ص = −٤

ص² + ٢ص = ٠

ص(ص + ٢) = ٠ ← ص = ٠، ص = −٢

- **نعوض قيم ص في أي من المعادلتين لإيجاد قيم س ((نختار معادلة ٢))**

عند ص = ٠ ← س² − ٢(٠) = ٤ ← س² = ٤ ← س = ±٢ ← (±٢، ٠)

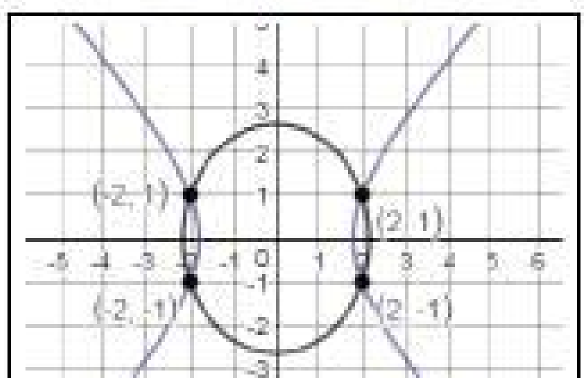
عند ص = −٢ ← س² − ٢(−٢) = ٤ ← س² = ٠ ← س = ٠ ← (٠، −٢)

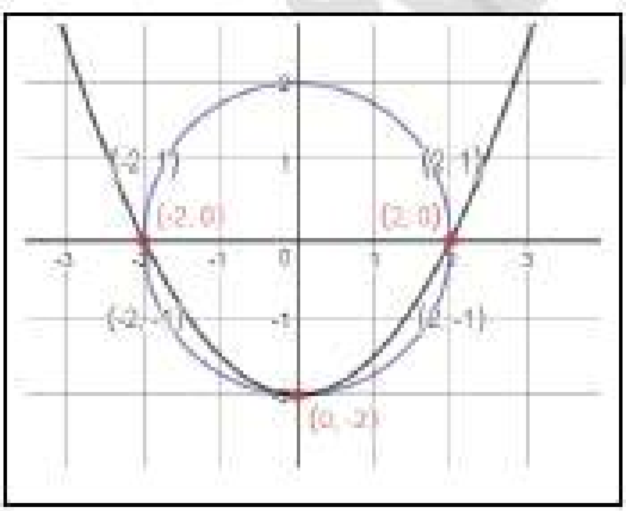
مجموعة حل النظام هي : {(٢،٠)،(−٢،٠)،(٠،−٢)}

أو {(±٢،٠)،(٠،−٢)}

لاحظ في فرع أ عدد الحلول ٤ ، بينما في فرع ب عدد الحلول ٣ .

التمثيل البياني التالي للفرعين يفسر ذلك .





الحل للفرع السابق بالتعويض

جـ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٤ \quad \ldots\ldots (١)$

$س^{٢} - ٢ص = ٤ \quad \ldots\ldots (٢)$

الحل :

- من فرع ٢ نكتب ص بدلالة س $ص = \frac{س^{٢} - ٤}{٢} \quad \ldots\ldots (٣)$
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ١ ، ونفك الأقواس ونرتب ونحل .

$$س^{٢} + \left(\frac{س^{٢} - ٤}{٢}\right)^{٢} = ٤ \rightarrow \left(س^{٢} + \frac{س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٦}{٤} = ٤\right)(\times ٤)$$

$$٤س^{٢} + س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٦ = ١٦ \rightarrow س^{٤} - ٤س^{٢} = ٠$$

$$س^{٢}\left(س^{٢} - ٤\right) = ٠ \rightarrow س^{٢} = ٠ ، س^{٢} = ٤ \rightarrow س = ٠ ، س = \pm ٢$$

عند $س = ٠ \rightarrow ص = \frac{(٠)^{٢} - ٤}{٢} \rightarrow ص = -٢ \rightarrow \boxed{(٠ ، -٢)}$

عند $س = ٢ \rightarrow ص = \frac{(٢)^{٢} - ٤}{٢} \rightarrow ص = ٠ \rightarrow \boxed{(٢ ، ٠)}$

عند $س = -٢ \rightarrow ص = \frac{(-٢)^{٢} - ٤}{٢} \rightarrow ص = ٠ \rightarrow \boxed{(-٢ ، ٠)}$

مجموعة حل النظام هي : $\{(٢ ، ٠) ، (-٢ ، ٠) ، (٠ ، -٢)\}$

أو $\{(\pm ٢ ، ٠) ، (٠ ، -٢)\}$

لاحظ هنا أن الحل بطريقة الحذف أسهل من طريقة التعويض .

د) $٢س^٢ + ص^٢ = ٤ \;......(١)$

$٢س^٢ - ٣ص^٢ = ١٢ \;.....(٢)$

الحل : بضرب المعادلة ١ في ٣ وجمعها لمعادلة ٢ ، لحذف المتغير ص .

$$٣ \times م_١ \leftarrow \quad ٦س^٢ + ٣ص^٢ = ١٢$$

$$٢س^٢ - ٣ص^٢ = ١٢$$

$$٨س^٢ = ٢٤$$

$$س^٢ = ٣ \leftarrow س = \pm \sqrt{٣}$$

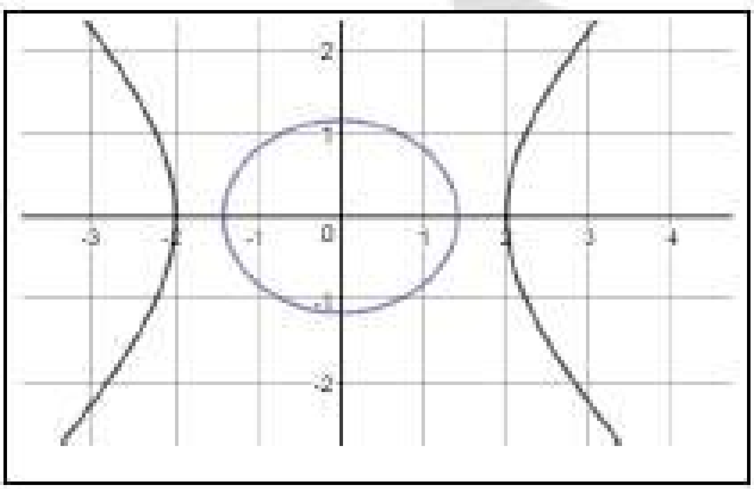
- **نعوض قيم س في معادلة ، لإيجاد قيم ص .**

عند $س = \sqrt{٣} \leftarrow ٢\left(\sqrt{٣}\right)^٢ + ص^٢ = ٤ \leftarrow ص^٢ = -٢$ **لا يوجد حل في ح**

عند $س = -\sqrt{٣} \leftarrow ٢\left(-\sqrt{٣}\right)^٢ + ص^٢ = ٤ \leftarrow ص^٢ = -٢$ **لا يوجد حل في ح**

نستنتج مما سبق أن النظام لا يوجد له حل .

التفسير البياني :



هـ) ٢س^{٢} − ص^{٢} = ٧ ....(١)

س^{٢} + س ص = ٢ ....(٢)

الحل :

لاحظ هنا في هذا النظام أننا لا نستطيع حذف أيٍ من المتغيرين لذلك نقوم بحذف الحد الثابت

- **نضرب المعادلة ١ في ٢ ، ومعادلة ٢ في − ٧**

٢ × م$_{١}$ ← ٤س^{٢} − ٢ص^{٢} = ١٤

−٧ × م$_{٢}$ ← −٧س^{٢} − ٧س ص = −١٤

(−٣س^{٢} − ٧س ص − ٢ص^{٢} = ٠) (× −١)

٣س^{٢} + ٧س ص + ٢ص^{٢} = ٠ ← (٣س + ص)(س + ٢ص) = ٠

س = $\frac{-١}{٣}$ص ، س = −٢ص

لاحظ هنا أنه تم إيجاد قيمة س بدلالة ص ، نعوض في معادلة ١ ، لإيجاد قيمة ص

- س = $\frac{-١}{٣}$ص ← ٢($\frac{-١}{٣}$ص)^{٢} − ص^{٢} = ٧ ← $\frac{٢}{٩}$ص^{٢} − ص^{٢} = ٧

$\frac{٢}{٩}$ص^{٢} − ص^{٢} = ٧ ← $\frac{-٧}{٩}$ص^{٢} = ٧ ← ص^{٢} = −٩ (✗)

لا يوجد حل في مجموعة الأعداد الحقيقية .

- س = −٢ص ← ٢(−٢ص)^{٢} − ص^{٢} = ٧ ← ٨ص^{٢} − ص^{٢} = ٧

٨ص^{٢} − ص^{٢} = ٧ ← ٧ص^{٢} = ٧ ← ص^{٢} = ١ ← ص = ±١

- ص = ١ ← س = −٢(١) ← س = −٢ ← (−٢، ١)
- ص = −١ ← س = −٢(−١) ← س = ٢ ← (٢، −١)

مجموعة حل النظام هي : {(−٢، ١)، (٢، −١)}

مثال (٢) :

في بيت الريموني سجادتان مربعتا الشكل ، مجموعة مساحتيهما ٤١ م^{٢} ، والفرق بين مساحتيهما ٩ م^{٢} ، جد بعد كل منهما .

الحل :

- نفرض بعد السجادة الأكبر س ، بعد السجادة الأصغر ص
- مجموعة مساحتيهما ٤١ م^{٢} ← س^{٢} + ص^{٢} = ٤١ . . . . (١)
- الفرق بين مساحتيهما ٩ م^{٢} ← س^{٢} − ص^{٢} = ٩ . . . . (٢)

في المعادلة ٢ ، لا يجوز كتابة ← ص^{٢} − س^{٢} = ٩ لماذا ؟؟؟؟

- بجمع المعادلتين ١ ، ٢ لحذف المتغير ص نحصل على ← ٢س^{٢} = ٥٠

← ٢س^{٢} = ٥٠ ← س^{٢} = ٢٥ ← س = ±٥ ، س = −٥ مرفوضة

نعوض قيمة س ، في معادلة ١ ، لإيجاد قيمة ص

عند س = ٥ ← (٥)^{٢} + ص^{٢} = ٤١ ← ص^{٢} = ١٦ ← ص = ±٤ ، ص = −٤ مرفوضة

بعد السجادة الكبرى ٥ م ,,, بعد السجادة الصغرى ٤ م

مثال (٢) :

عددان موجبان ، الفرق بين مربعيهما يساوي ٤٠ ، إذا كان مربع العدد الأكبر مضافاً إليه أربعة أمثال الأصغر يساوي ٨٥ ، فما العددان ؟

الحل : نفرض العدد : الأكبر س الأصغر ص

- الفرق بين مربعيهما يساوي ٤٠ ← س^{٢} − ص^{٢} = ٤٠ . . . . . . (١)
- مربع العدد الأكبر مضافاً إليه أربعة أمثال الأصغر يساوي ٨٥

← س^{٢} + ٤ص = ٨٥ . . . . . . (٢)

- نضرب المعادلة الأولى في - ١ ونجمعها للمعادلة الثانية ونكمل الحل

$$-١ \times ٢ ، \leftarrow -\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = -٤٠$$

$$\underline{\text{س}^{٢} + ٤\text{ص} = ٨٥}$$

$$\text{ص}^{٢} + ٤\text{ص} = ٤٥$$

$$\text{ص}^{٢} + ٤\text{ص} - ٤٥ = ٠ \leftarrow (\text{ص} - ٥)(\text{ص} + ٩) = ٠$$

$$\text{ص} = ٥\ (✓) ، \text{ص} = -٩\ ✗$$

نعوض قيمة ص في معادلة ٢ لإيجاد قيمة س

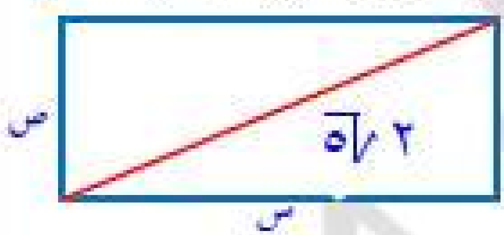
$$\text{ص} = ٥ \leftarrow \text{س}^{٢} + ٤(٥) = ٨٥ \leftarrow \text{س}^{٢} = ٦٥$$

$$\text{س} = \sqrt{٦٥}\ (✓) ، \text{س} = -\sqrt{٦٥}\ (✗)$$

العددان هما $\leftarrow ٥ ، \sqrt{٦٥}$

مثال (٣) :

مستطيل مساحته تساوي ٨ سم٢ ، إذا كان طول قطره يساوي $٢\sqrt{٥}$ سم ، جد بعدي المستطيل ؟



الحل : نفرض بعدي المستطيل س ، ص

- مساحة المستطيل = البعد الأول × البعد الثاني ← س ص = ٨ . . . . (١)
- مربع القطر = مجموع مربعي البعدين ← س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ . . . . (٢)
- من معادلة ١ ، نكتب ص بدلالة س ← $\text{ص} = \frac{٨}{\text{س}}$ . . . . (٣)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ونفك الأقواس ونرتب ونحل المعادلة الناتجة :

$\text{س}^{٢} + \left(\frac{٨}{\text{س}}\right)^{٢} = ٢٠ \rightarrow \text{س}^{٢} + \frac{٦٤}{\text{س}^{٢}} = ٢٠ \left(\times \text{س}^{٢} \text{ ، } \text{س}^{٢} \neq ٠\right)$

$\text{س}^{٤} + ٦٤ = ٢٠\text{س}^{٢} \rightarrow \text{س}^{٤} - ٢٠\text{س}^{٢} + ٦٤ = ٠$

$\left(\text{س}^{٢} - ٤\right)\left(\text{س}^{٢} - ١٦\right) = ٠ \rightarrow \text{س}^{٢} = ٤ \rightarrow \text{س} = ٢$

$\rightarrow \text{س}^{٢} = ١٦ \rightarrow \text{س} = ٤$

- تعوض قيم س في معادلة ٣ لإيجاد قيم ص

ملاحظة :

تم إهمال القيم السالبة

لأن الأبعاد موجبة

عند $\text{س} = ٢ \rightarrow \text{ص} = \frac{٨}{٢} \rightarrow \text{ص} = ٤$

عند $\text{س} = ٤ \rightarrow \text{ص} = \frac{٨}{٤} \rightarrow \text{ص} = ٢$

إذاً بعدي المستطيل ٢ سم ،،، ٤ سم

حل أخر للمثال السابق (حذف الحد الثابت)

- نضرب المعادلة ١ في ـ ٥ والثانية نضربها في ٢ ، ثم نجمع المعادلتين .

$-٥ \times \text{م}_{١} \rightarrow -٥\text{س ص} = -٤٠$

$٢ \times \text{م}_{٢} \rightarrow ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{ص}^{٢} = ٤٠$

$٢\text{س}^{٢} - ٥\text{س ص} + ٢\text{ص}^{٢} = ٠$

$(٢\text{س} - \text{ص})(\text{س} - ٢\text{ص}) = ٠$

$\text{س} = \frac{١}{٢}\text{ص} \text{ ، } \text{س} = ٢\text{ص}$

- تعوض قيم س الناتجة (بدلالة ص) في معادلة ١ لإيجاد قيم ص الموجبة فقط

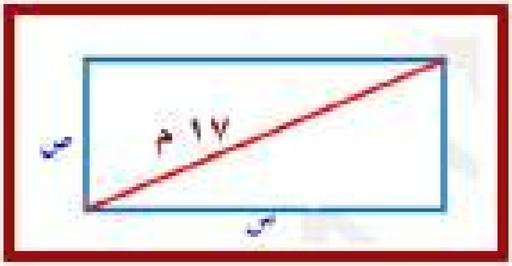
عند $\text{س} = \frac{١}{٢}\text{ص} \rightarrow \left(\frac{١}{٢}\text{ص}\right)\text{ص} = ٨ \rightarrow \text{ص}^{٢} = ١٦ \rightarrow \boxed{\text{ص} = ٤ \rightarrow \text{س} = ٢}$

عند $\text{س} = ٢\text{ص} \rightarrow (٢\text{ص})\text{ص} = ٨ \rightarrow \text{ص}^{٢} = ٤ \rightarrow \boxed{\text{ص} = ٢ \rightarrow \text{س} = ٤}$

إذاً بعدي المستطيل ٢ سم ،،، ٤ سم

مثال (٣) :

حديقة مستطيلة الشكل ، مساحتها ١٢٠ م٢ ، فإذا كان طول قطرها ١٧ م ، فجد بعدي الحديقة .



الحل :

نفرض بعدي الحديقة س ، ص

- مساحة الحديقة = البعد الأول × البعد الثاني ← س ص = ١٢٠ .....(١)
- مربع القطر = مجموع مربعي البعدين ← $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٨٩$ .....(٢)
- من معادلة ١ ، نكتب ص بدلالة س ← $\text{ص} = \frac{١٢٠}{\text{س}}$ .....(٣)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ونفك الأقواس ونرتب ونحل المعادلة الناتجة :

$$\text{س}^{٢} + \left(\frac{١٢٠}{\text{س}}\right)^{٢} = ٢٨٩ \leftarrow \text{س}^{٢} + \frac{١٤٤٠٠}{\text{س}^{٢}} = ٢٨٩ \quad (\times \text{س}^{٢} \neq ٠)$$

$$\text{س}^{٤} + ١٤٤٠٠ = ٢٨٩\text{س}^{٢} \leftarrow \text{س}^{٤} - ٢٨٩\text{س}^{٢} + ١٤٤٠٠ = ٠$$

$$(\text{س}^{٢} - ٦٤)(\text{س}^{٢} - ٢٢٥) = ٠ \leftarrow \text{س}^{٢} = ٦٤ \leftarrow \text{س} = ٨$$

$$\leftarrow \text{س}^{٢} = ٢٢٥ \leftarrow \text{س} = ١٥$$

- نعوض قيم س في معادلة ٣ لإيجاد قيم ص

عند $\text{س} = ٨ \leftarrow \text{ص} = \frac{١٢٠}{٨} \leftarrow \text{ص} = ١٥$

عند $\text{س} = ١٥ \leftarrow \text{ص} = \frac{١٢٠}{١٥} \leftarrow \text{ص} = ٨$

ملاحظة :

تم إهمال القيم السالبة

لأن الأبعاد موجبة

إذاً بعدي الحديقة ٨ م ... ١٥ م

الأسئلة

١) حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية ، ثم تحقق من صحة الحل :

أ) ٥س^{٢} − ٢ص^{٢} = ١٨ .... (١)

٣س^{٢} + ٥ص^{٢} = ١٧ .... (٢)

الحل :

- نضرب المعادلة ١ في ٥ ، نضرب المعادلة ٢ في ٢ ثم نجمع المعادلتين لحذف ص

٥ × م$_{١}$ ← ٢٥س^{٢} − ١٠ص^{٢} = ٩٠

٢ × م$_{٢}$ ← ٦س^{٢} + ١٠ص^{٢} = ٣٤

٣١س^{٢} = ١٢٤

٣١س^{٢} = ١٢٤ (÷ ٣١) ← س^{٢} = ٤

س = ٢، س = −٢

- نعوض قيم س في معادلة ١ لإيجاد قيم ص

س = ٢ ← ٥(٢)^{٢} − ٢ص^{٢} = ١٨ ← ص^{٢} = ١ ← ص = ±١ ← $\boxed{(٢، ±١)}$

س = −٢ ← ٥(−٢)^{٢} − ٢ص^{٢} = ١٨ ← ص^{٢} = ١ ← ص = ±١ ← $\boxed{(−٢، ±١)}$

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(٢، ±١) ، (−٢، ±١)}

ب) س ص = ١٨ .... (١)

$\frac{١}{س} - \frac{١}{ص} = \frac{١}{٦}$ .... (٢)

الحل : نضرب المعادلة الثانية في ٦س ص (المضاعف المشترك الأصغر للمقامات) .

٦س ص × م$_{٢}$ ← ٦ص − ٦س = س ص ← ... (٣)

• لكن من معادلة ١

س ص = ١٨ ← ٦ص − ٦س = ١٨ ← ص − س = ٣ ← ص = س + ٣ ...(٤)

• نعوض معادلة ٤ في معادلة ١

س(س + ٣) = ١٨ ← س^{٢} + ٣س − ١٨ = ٠

(س + ٦)(س − ٣) = ٠ ← س = −٦، س = ٣

• نعوض قيم س في معادلة ٤ لإيجاد قيم ص

س = −٦ ← ص = −٦ + ٣ ← ص = −٣ ← (−٦، −٣)

س = ٣ ← ص = ٣ + ٣ ← ص = ٦ ← (٣، ٦)

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(−٦، −٣) ، (٣، ٦)}

جـ) س^{٢} + ص^{٢} = ٩ ......(١)

س^{٢} − س = ٦ ......(٢)

الحل :

لاحظ في هذا النظام أننا لا نستطيع حذف أي من المتغيرين أو الحد الثابت ، لذلك من المعادلة الثانية نجد قيم س ونعوضها في المعادلة الأولى .

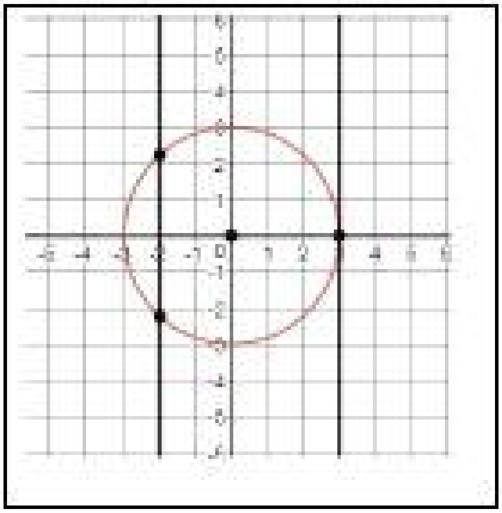
س^{٢} − س = ٦ ← س^{٢} − س − ٦ = ٠

(س + ٢)(س − ٣) = ٠ ← س = −٢، س = ٣

• س = −٢ ← (−٢)^{٢} + ص^{٢} = ٩ ← ص^{٢} = ٥ ← ص = ± √٥ ← (−٢، ± √٥)

• س = ٣ ← (٣)^{٢} + ص^{٢} = ٩ ← ص^{٢} = ٠ ← ص = ٠ ← (٣، ٠)

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(−٢، ± √٥) ، (٣، ٠)}



تفسير الفرع السابق بيانياً :

عند بداية الحل تم تحويل المعادلة التربيعية إلى معادلتين خطيتين س = ٣ ، س = ـ ٢ ، وتم تعويض كل معادلة خطية لوحده في المعادلة الأولى لذلك الحل بيانياً يظهر نقاط التقاطع بين الدائرة والمستقيمين .

(كأننا جزئنا النظام إلى نظام خطي تربيعي)

د) س^{٢} + س ص = ٤ . . . . (١)

٢س ص − ص^{٢} = −٣ . . . . (٢)

الحل : نحذف الحد الثابت بضرب المعادلة ١ في ـ ٣ ومعادلة ٢ في ٤ ، ثم نكمل الحل

٣ × م١ ← ٣س^{٢} + ٣س ص = ١٢

٤ × م٢ ← ٨س ص − ٤ص^{٢} = −١٢

٣س^{٢} + ١١س ص − ٤ص^{٢} = ٠

٣س^{٢} + ١١س ص − ٤ص^{٢} = ٠ ← (٣س − ص)(س + ٤ص) = ٠

س = $\frac{١}{٣}$ ص ، س = −٤ص   نعوض قيم س بدلالة ص في معادلة ١

• س = $\frac{١}{٣}$ ص ← $\left(\frac{١}{٣}\text{ص}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{١}{٣}\text{ص}\right)$ص = ٤ ← $\frac{١}{٩}$ص^{٢} + $\frac{١}{٣}$ص^{٢} = ٤

٤ص^{٢} = ٣٦ ← ص^{٢} = ٩ ← ص = ±٣ ← س = ±١ ← $\boxed{(\pm١ ، \pm٣)}$

• س = −٤ص ← (−٤ص)^{٢} + (−٤ص) ص = ٤ ← ١٦ص^{٢} − ٤ص^{٢} = ٤

١٢ص^{٢} = ٤ ← ص^{٢} = $\frac{١}{٣}$ ← ص = ±$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ← س = ∓$\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ ← $\boxed{\left(\mp\frac{٤}{\sqrt{٣}} ، \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)}$

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي $\left\{(\pm١ ، \pm٣) ، \left(\mp\frac{٤}{\sqrt{٣}} ، \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)\right\}$

سليمان دلدوم أبو هيه

هـ) س^{٢} + ص^{٢} = ٩ ....(١)
س^{٢} + ص^{٢} + ١٢س + ٢٧ = ٠ ....(٢)

الحل :

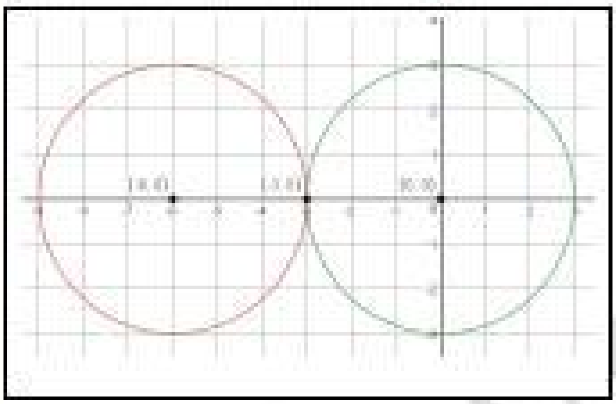
- **نعوض الطرف الأيسر من معادلة في معادلة ٢ ونكمل الحل**

٩ + ١٢س + ٢٧ = ٠ ← ١٢س = −٣٦ ← $\boxed{\text{س = −٣}}$

- **نعوض قيمة س في معادلة ١ لإيجاد قيم ص**

س = −٣ ← (−٣)^{٢} + ص^{٢} = ٩ ← ص^{٢} = ٠ ← ص = ٠ ← $\boxed{\text{(−٣،٠)}}$

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(−٣،٠)}



التفسير البياني

المعادلة الأولى تمثل معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٣ وحدات .

المعادلة الثانية تمثل معادلة دائرة مركزها النقطة (−٦،٠) ونصف قطرها ٣ وحدات .

ومجموعة الحل للنظام تمثل نقطة التماس بين الدائرتين . .

و) س^{٢} − ص^{٢} = ٢٤ ....(١)
س^{٢} = (ص + ٤)^{٢} ....(٢)

الحل :

- **نعوض الطرف الأيسر في المعادلة الثانية بدل س^{٢} في المعادلة الأولى ، ثم نفك الأقواس ونرتب الناتج ثم نحل المعادلة لإيجاد قيمة (قيم) ص .**

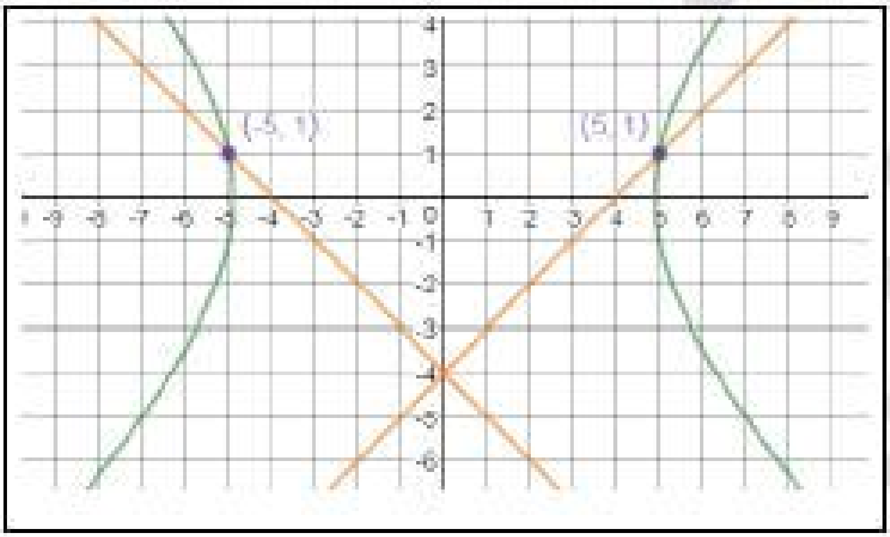
(ص + ٤)^{٢} − ص^{٢} = ٢٤ ← ص^{٢} + ٨ص + ١٦ − ص^{٢} = ٢٤ ←
٨ص + ١٦ = ٢٤ ← ٨ص = ٨ ← ص = ١

- تعوض قيمة ص في معادلة ٢ لإيجاد قيمة (قيم) س

ص = ١ ← س^{٢} = (١ + ٤)^{٢} ← س^{٢} = ٢٥ ← س = ±٥ ← (± ٥،١)

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(±٥،١)}

التفسير البياني :



---

٢) إذا كان س + $\frac{١}{س}$ = ٢ ، حيث س ≠ ٠ ، فجد قيمة س^{٢} + $\frac{١}{س^{٢}}$

الحل :

تذكر أن (الحد الأول ± الحد الثاني)^{٢} =

(الحد الأول)^{٢} + (الحد الثاني)^{٢} ± ٢ × (الحد الأول × الحد الثاني)

وبالرموز

(أ ± ب)^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ± ٢أب

بتربيع المقدار $\text{س} + \frac{١}{\text{س}} = ٢$

$$\text{س} + \frac{١}{\text{س}} = ٢ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢} = (٢)^{٢} \leftarrow \text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٢ \times \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} = ٤$$

$$\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٢ = ٤ \leftarrow \boxed{\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} = ٢}$$

---

٣) جد نقط التقاطع بين الدائرتين $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤$ ، $(\text{س} - ٢)^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٨$

الحل :

- من المعادلة الثانية نفك القوس ونرتب

$$(\text{س} - ٢)^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٨ \leftarrow \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤ + \text{ص}^{٢} = ٨$$

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٤\text{س} = ٤$$

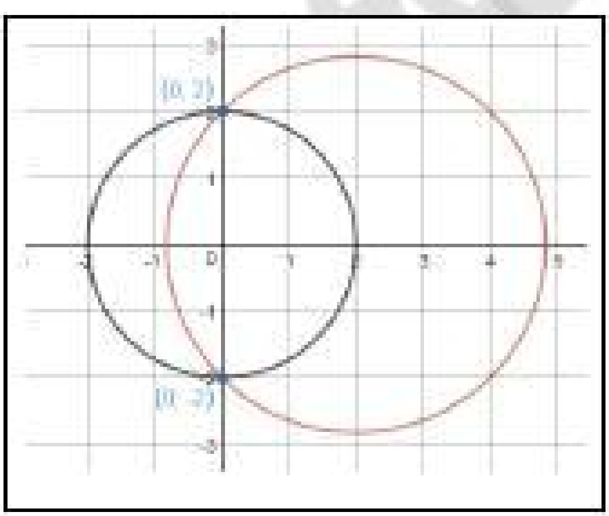
لكن من المعادلة الأولى $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤ \leftarrow ٤ - ٤\text{س} = ٤ \leftarrow \text{س} = ٠$

نعوض قيمة س في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة ص

- $\text{س} = ٠ \leftarrow (٠)^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤ \leftarrow \text{ص} = \pm ٢ \leftarrow \boxed{(٠ ، \pm ٢)}$

بعد التأكد من صحة الحل ، نقاط التقاطع هي $\{(٠ ، \pm ٢)\}$

التفسير البياني :



٤) عددان ، مجموع مربعيهما يساوي ٥٨ ، والفرق بين مربعيهما يساوي ٤٠ ، فما العددان ؟

الحل :

- نفرض العدد : الأكبر س ،،، الأصغر ص
- مجموع مربعيهما يساوي ٥٨ ← س ^٢^ + ص ^٢^ = ٥٨ ٠٠٠٠٠(١)
- الفرق بين مربعيهما يساوي ٤٠ ← س ^٢^ − ص ^٢^ = ٤٠ ٠٠٠٠٠(٢)
- نجمع المعادلتين لحذف المتغير ص ونكمل الحل

س ^٢^ + ص ^٢^ = ٥٨
س ^٢^ − ص ^٢^ = ٤٠

٢س ^٢^ = ٩٨ ←

٢س ^٢^ = ٩٨ ← س ^٢^ = ٤٩
س = ٧
س = ٧ ← (٧) ^٢^ + ص ^٢^ = ٥٨
ص ^٢^ = ٩،ص = ٣

العددان هما ٧ ،، ٣

---

٥) قطعة أرض على شكل مثلث متطابق الضلعين ، طول ضلعه المتطابق ٥٠ م ، ومساحته ١٢٠٠ م٢ ، جد طول قاعدته وارتفاعه .

الحل :

- نفرض طول ضلع القاعدة ٢ س ، الارتفاع ع .
- مساحة الأرض = مساحة المثلث

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

$\frac{1}{2}$ × ٢س × ع = ١٢٠٠ ← س ع = ١٢٠٠ ٠٠٠٠٠٠(١)

- بتطبيق مبرهنة فيثاغورث على المثلث باللون الأخضر

$$\leftarrow \text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢} = ٢٥٠٠ \quad ......\ (٢)$$

- من معادلة ١ نكتب س بدلالة ع $\leftarrow \text{س} = \dfrac{١٢٠٠}{\text{ع}} \quad ......\ (٣)$

- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ونفك الأقواس ونرتب ونحلل

$$\leftarrow \left(\frac{١٢٠٠}{\text{ع}}\right)^{٢} + \text{ع}^{٢} = ٢٥٠٠ \leftarrow \frac{١٤٤٠٠٠٠}{\text{ع}^{٢}} + \text{ع}^{٢} = ٢٥٠٠ \left(\times \text{ع}^{٢} \neq ٠\right)$$

$$١٤٤٠٠٠٠ + \text{ع}^{٤} = ٢٥٠٠\text{ع}^{٢} \leftarrow \text{ع}^{٤} - ٢٥٠٠\text{ع}^{٢} + ١٤٤٠٠٠٠ = ٠$$

$$\left(\text{ع}^{٢} - ٩٠٠\right)\left(\text{ع}^{٢} - ١٦٠٠\right) = ٠ \leftarrow \text{ع}^{٢} = ٩٠٠ \leftarrow \text{ع} = ٣٠$$

$$\leftarrow \text{ع}^{٢} = ١٦٠٠ \leftarrow \text{ع} = ٤٠$$

- نعوض قيم ع الناتجة في معادلة ٣ لإيجاد قيم س

$\text{ع} = ٣٠ \leftarrow \text{س} = \dfrac{١٢٠٠}{٣٠} \leftarrow \text{س} = ٤٠ \leftarrow \boxed{٢\text{س} = ٨٠}$ متراً طول القاعدة

$\text{ع} = ٤٠ \leftarrow \text{س} = \dfrac{١٢٠٠}{٤٠} \leftarrow \text{س} = ٣٠ \leftarrow \boxed{٢\text{س} = ٦٠}$ متراً طول القاعدة

إذا

طول القاعدة ٨٠ متر ، الارتفاع ٣٠ متر

أو

طول القاعدة ٦٠ متر ، الارتفاع ٤٠ متر

أسئلة الوحدة

١) حل كلا من أنظمة المعادلات الآتية ، ثم تحقق من صحة الحل :

أ) س + ٢ص − ع = ٦ . . . . (١)

٢س + ص + ع = ٣ . . . . (٢)

س + ٢ص + ع = ٤ . . . . (٣)

الحل : نحذف المتغير ع من المعادلات الثلاث

م١ + م٢ ← س + ٢ص − ع = ٦ . . . . (١)

٢س + ص + ع = ٣ . . . . (٢)

٣س + ٣ص = ٩ (÷ ٣) . . . . . . (٣)

$\boxed{\text{س + ص = ٣}}$ . . . . (٣)

م١ + م٣ ← س + ٢ص − ع = ٦ . . . . (١)

س + ٢ص + ع = ٤ . . . . (٣)

٢س + ٤ص = ١٠ (÷ ٢) . . . . . . (٤)

$\boxed{\text{س + ٢ص = ٥}}$ . . . . (٤)

• نحذف المتغير س من المعادلتين ٣ ، ٤

−١ × م٣ + م٤ ← −س − ص = −٣ . . . . (٣)

س + ٢ص = ٥ . . . . (٤)

$\boxed{\text{ص = ٢}}$

نعوض قيمة ص في معادلة ٤ لإيجاد قيمة س ص = ٤ ← س + ٤ = ٣ ← $\boxed{\text{س = −١}}$

• نعوض قيمتي س ، ص في معادلة ١ لإيجاد قيمة ع

س = −١، ص = ٤ ← −١ + ٢(٢) − ع = ٦ ← $\boxed{\text{ع = −٣}}$

مجموعة حل النظام هي (−١، ٢، −٣) .

ب) ص = س^{٢} − ١ ......(١)
ص = ٥ − س ......(٢)

الحل : بتعويض معادلة ٢ في معادلة ١ وترتب ونحل

٥ − س = س^{٢} − ١ ← س^{٢} + س − ٦ = ٠
(س − ٢)(س + ٣) = ٠
س = ٢، س = −٣

• بتعويض قيم س في معادلة ٢ لإيجاد قيم ص

• س = ٢ ← ص = ٥ − (٢) ← ص = ٣ ← $\boxed{(٢،٣)}$
• س = −٣ ← ص = ٥ − (−٣) ← ص = ٨ ← $\boxed{(−٣،٨)}$

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(٢،٣)،(−٣،٨)}

جـ) س^{٢} − ص^{٢} = ٩ ......(١)
ص^{٢} − ٢س = ٦ ......(٢)

الحل : بجمع المعادلتين لحذف المتغير ص ، ثم نرتب ونحل .

+ س^{٢} − $\cancel{ص^{٢}}$ = ٩
$\cancel{ص^{٢}}$ − ٢س = ٦

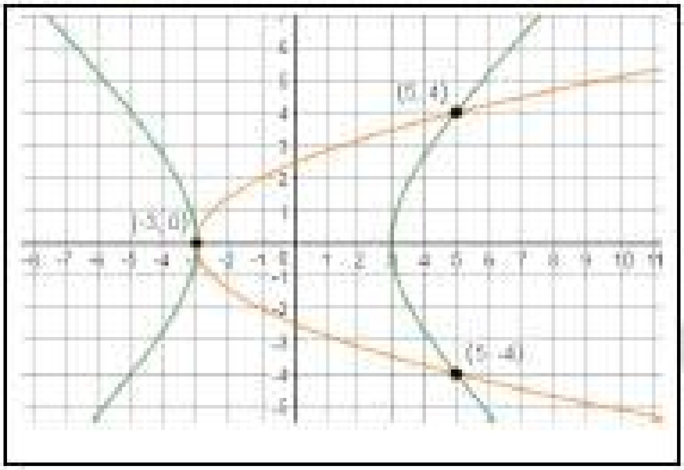
س^{٢} − ٢س = ١٥ ← س^{٢} − ٢س − ١٥ = ٠
(س + ٣)(س − ٥) = ٠ ← س = −٣، س = ٥

• نعوض قيم س في معادلة ٢ لإيجاد قيم المتغير ص

• س = −٣ ← ص^{٢} − ٢(−٣) = ٦ ← ص^{٢} = ٠ ← ص = ٠ ← $\boxed{(−٣،٠)}$
• س = ٥ ← ص^{٢} − ٢(٥) = ٦ ← ص^{٢} = ١٦ ← ص = ±٤ ← $\boxed{(٥،±٤)}$

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(−٣، ٠)، (٥، ±٤)}

التفسير البياني :



د) ٢أ + ٥ب + ٤جـ = ٤٤ .... (١)

٣أ + ٤ب = ٣٣ .... (٢)

٥أ = ١٥ .... (٣)

٢أ + ٥ب + ٤جـ = ٤٤

٣أ + ٤ب = ٣٣

٥أ = ١٥

الحل : هذا النظام يسمى بالنظام المثلثي

- من معادلة ٣ ٥أ = ١٥ ← $\boxed{\text{أ = ٣}}$
- نعوض قيمة أ في معادلة ٢ لإيجاد قيمة ب

أ = ٣ ← ٣(٣) + ٤ب = ٣٣ ← $\boxed{\text{ب = ٦}}$

- نعوض قيمتي أ، ب في معادلة ١ لإيجاد قيمة جـ .

أ = ٣، ب = ٦ ← ٢(٣) + ٥(٦) + ٤جـ = ٤٤ ← $\boxed{\text{جـ = ٢}}$

بعد التأكد من صحة الحل (أ، ب، جـ) = (٣، ٦، ٢)

هـ) ٢س + ص = ٩ ....(١)
س − ٢ع = −٣ ....(٢)
٢ص + ٣ع = ١٥ ....(٣)

الحل :

- نحذف المتغير س من المعادلتين ١ ، ٢ .

~~٢س~~ + ص = ٩ ....(١)
~~−٢س~~ + ٤ع = ٦ ....(٢) ← −٢ × م٢

ص + ٤ع = ١٥ ....(٤)

- من المعادلتين ٣ ، ٤ نحذف المتغير ص

~~٢ص~~ + ٣ع = ١٥ ....(١)
~~−٢ص~~ − ٨ع = −٣٠ ....(٢) ← −٢ × م٤

−٥ع = −١٥ ← **ع = ٣**

- نعوض قيمة ع في معادلة ٤ لإيجاد قيمة ص

ع = ٣ ← ص + ٤(٣) = ١٥ ← **ص = ٣**

- نعوض قيمة ص في معادلة ١ لإيجاد قيمة س

ص = ٢٧ ← ٢س + ٣ = ٩ ← **ص = ٣**

بعد التأكد من صحة الحل (س، ص، ع) = (٣، ٣، ٣)

و) س^{٢} + ص^{٢} − س ص = ٢١ ....(١)

س^{٢} − ٨ص^{٢} + ٢س ص = ٠ ....(٢)

الحل : من المعادلة الثانية نبدأ الحل عن طريق تحويلها إلى معادلتين خطيتين ثم نقوم بتعويض كل منهما في المعادلة الأولى (أنظر التمثيل البياني للنظام)

س^{٢} + ٢س ص − ٨ص^{٢} = ٠ ← (س − ٢ص)(س + ٤ص) = ٠

إما (س − ٢ص) = ٠ ← س = ٢ص أو (س + ٤ص) = ٠ ← س = −٤ص

أولاً : نعوض س = ٢ص في المعادلة الأولى ونرتب ونحلل

س = ٢ص ← (٢ص)^{٢} + ص^{٢} − (٢ص) ص − ٢١ = ٠

٤ص^{٢} + ص^{٢} − ٢ص^{٢} − ٢١ = ٠ ← ٣ص^{٢} = ٢١

ص^{٢} = ٧ ← ص = $\pm\sqrt{٧}$

• ص = $\pm\sqrt{٧}$ ← س = $\pm ٢\sqrt{٧}$ ← $\boxed{(\pm ٢\sqrt{٧} ، \pm\sqrt{٧})}$

ثانياً : نعوض س = −٤ص في المعادلة الأولى ونرتب ونحلل

س = −٤ص ← (−٤ص)^{٢} + ص^{٢} − (−٤ص) ص − ٢١ = ٠

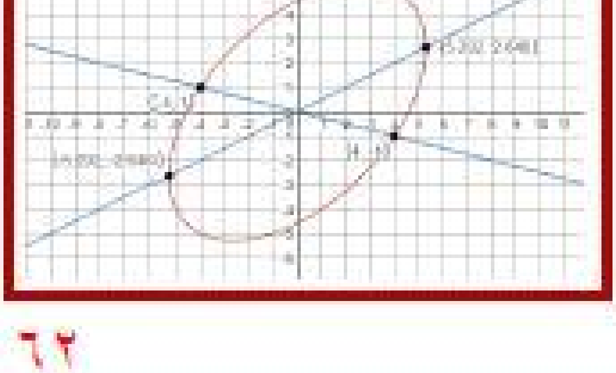
١٦ص^{٢} + ص^{٢} + ٤ص^{٢} − ٢١ = ٠ ← ٢١ص^{٢} = ٢١

ص^{٢} = ١ ← ص = $\pm$١

• ص = $\pm$١ ← س = $\mp$٤ ← $\boxed{(\mp ٤ ، \pm ١)}$

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي $\{(\pm ٢\sqrt{٧} ، \pm\sqrt{٧})، (\mp ٤ ، \pm ١)\}$

التفسير البياني :



ب) س^{٢} + ص^{٢} = ١٣ ....(١)

س − ص = ٥ ....(٢)

الحل :

- من معادلة ٢ نكتب س بدلالة ص ← س = ص + ٥ .....(٣)
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ١ ونرتب ونحلل

(ص + ٥)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ ← ص^{٢} + ١٠ص + ٢٥ + ص^{٢} = ١٣

٢ص^{٢} + ١٠ص + ١٢ = ٠ (÷ ٢) ← ص^{٢} + ٥ص + ٦ = ٠

(ص + ٢)(ص + ٣) = ٠ ← ص = −٢، ص = −٣

- نعوض قيم ص في معادلة ٣ لإيجاد قيم س

- ص = −٢ ← س = −٢ + ٥ ← س = ٣ ← (٣، −٢)
- ص = −٣ ← س = −٣ + ٥ ← س = ٢ ← (٢، −٣)

بعد التأكد من صحة الحل ، مجموعة حل النظام هي {(٣، −٢)، (٢، −٣)}

---

٢) ثلاثة أعداد موجبة مجموعها ٢٠ ، إذا كان العدد الأول يزيد بمقدار ٦ عن العدد الثاني ، والعدد الثاني يقل بمقدار ٥ عن العدد الثالث ، فجد الأعداد الثلاثة .

الحل :

- نفرض العدد : الأول س ، الثاني ص ، الثالث ع
- ثلاثة أعداد موجبة مجموعها ← س + ص + ع = ٢٠ ......(١)
- العدد الأول يزيد بمقدار ٦ عن العدد الثاني ((الأول = ٦ + الثاني))

← س = ٦ + ص ← س − ص = ٦ .....(٢)

• العدد الثاني يقل بمقدار ٥ عن العدد الثالث ((الثاني + ٥ = الثالث))

← ص + ٥ = ع ← ص − ع = −٥ ......(٣)

• النظام أصبح كما يلي

س + ص + ع = ٢٠ ......(١)

س − ص = ٦ ......(٢)

ص − ع = −٥ ......(٣)

• نحذف المتغير ص من المعادلات الثلاث .

م١ + م٢ ← ٢س + ع = ٢٦ ......(٤)

م١ + −١ × م٣ ← س + ٢ع = ٢٥ ......(٥)

• نحذف المتغير ع من المعادلتين ٤ ، ٥ .

−٢ × م٤ + م٥ ← −٣س = −٢٧ ← ص = ٩

• نعوض قيمة س في معادلة ٥ لإيجاد قيمة ع

س = ٩ ← ٩ + ٢ع = ٢٥ ← ع = ٨

• نعوض قيمة ع في معادلة ٣ لإيجاد قيمة ص

ع = ٨ ← ص − ٨ = −٥ ← ص = ٣

بعد التأكد من صحة الحل الأعداد هي

س = ٩ ، ص = ٣ ، ع = ٨

التأكد من صحة الحل :

٩ + ٣ + ٨ = ٢٠

٩ − ٣ = ٦

٣ − ٨ = −٥

✓

٣) تتحرك نقطة على المستقيم الذي معادلته : ٢ص = ٥س − ١ . في لحظة ما كان إحداثيها الصادي يساوي مثلي مربع إحداثيها السيني ، فجد إحداثيي هذه النقطة في تلك اللحظة .

الحل :

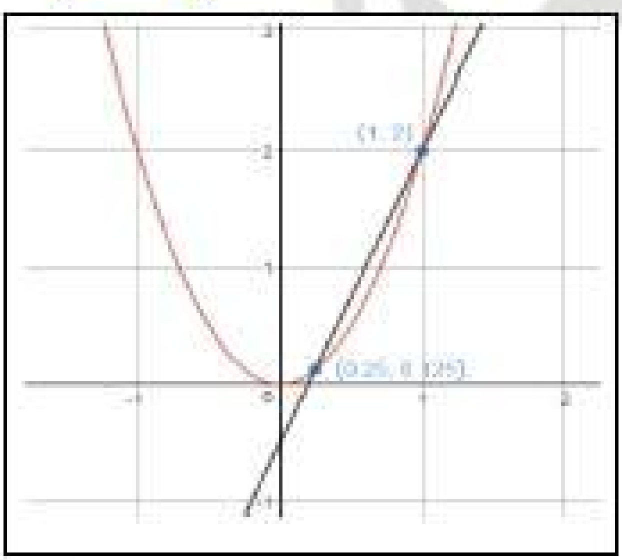
- نفرض النقطة المتحركة (س، ص)
- النقطة تحقق المعادلة ٢ص = ٥س − ١ . . . . (١)
- إحداثيها الصادي يساوي مثلي مربع إحداثيها السيني ص = $٢س^{٢}$ . . . (٢)
- بتعويض معادلة ٢ في معادلة ١ ثم نرتب ونحلل

$$٢(٢س^{٢}) = ٥س - ١ \leftarrow ٤س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$$

$$(٤س - ١)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = \frac{١}{٤}، س = ١$$

- بتعويض قيم س في معادلة ١ لإيجاد قيم ص

- $س = \frac{١}{٤} \leftarrow ٢ص = ٥\left(\frac{١}{٤}\right) - ١ \leftarrow ص = \frac{١}{٨} \leftarrow \boxed{\left(\frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}\right)}$
- $س = ١ \leftarrow ٢ص = ٥(١) - ١ \leftarrow ص = ٢ \leftarrow \leftarrow \boxed{(١، ٢)}$



إذا يوجد نقطتان هما $\left(\frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}\right)$، (١، ٢)

التفسير البياني :

سليمان دلدوم أبو هيه

٤) مثلث قائم الزاوية ، مساحته ٣٠ سم٢ ، وطول وتره ١٣ سم ، جد طولي ضلعي القائمة .

الحل :

نفرض طول ضلعي القائمة س، ص

- مساحته ٣٠ سم٢ ← $\frac{١}{٢}(\text{س ص}) = ٣٠$ ← س ص $= ٦٠ \ldots (١)$
- وطول وتره ١٣ سم ← بتطبيق مبرهنة فيثاغورث على المثلث

← $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١٦٩ \ldots (٢)$

- من معادلة ١ نكتب س بدلالة ص ← $\text{س} = \frac{٦٠}{\text{ص}} \ldots (٣)$
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ونرتب ونحلل .

$$\left(\frac{٦٠}{\text{ص}}\right)^٢ + \text{ص}^٢ = ١٦٩ \leftarrow \frac{٣٦٠٠}{\text{ص}^٢} + \text{ص}^٢ = ١٦٩ (\times \text{ص}^٢)$$

$$٣٦٠٠ + \text{ص}^٤ = ١٦٩\text{ص}^٢ \leftarrow \text{ص}^٤ - ١٦٩\text{ص}^٢ + ٣٦٠٠ = ٠$$

$$(\text{ص}^٢ - ١٤٤)(\text{ص}^٢ - ٢٥) = ٠ \leftarrow \text{ص}^٢ = ١٤٤، \text{ص}^٢ = ٢٥$$

$$\text{ص} = ١٢، \text{ص} = ٥$$

ملاحظة :

تم إهمال القيم السالبة لأن الأبعاد موجبة

- نعوض قيم ص في معادلة ٣ لإيجاد قيم س

- $\text{ص} = ١٢ \leftarrow \text{س} = \frac{٦٠}{١٢} \leftarrow \text{س} = ٥ \leftarrow \boxed{(٥، ١٢)}$
- $\text{ص} = ٥ \leftarrow \text{س} = \frac{٦٠}{٥} \leftarrow \text{س} = ١٢ \leftarrow \boxed{(١٢، ٥)}$

طول ضلعي القائمة يساوي ١٢ ، ٥

٥) لديك القيم التي تمثل (س،ص،ع) على الترتيب : (١،٢،٣) ، (-٢،٢،٦) ، (٣،٢،١) ، أي منها تمثل حلاً للنظام :

$$\begin{cases} س + ص + ع = ٦ \\ ٢س - ص + ع = ٣ \\ ٣س = ٢ص - ١ \end{cases}$$

الحل : نعوض النقاط في النظام والنقطة التي تحقق النظام تعتبر حلاً له .

• $(١،٢،٣) \leftarrow \begin{cases} ١ + ٢ + ٣ = ٦ ✓ \\ ٢ - ٢ + ٣ = ٣ ✓ \\ ٣ = ٢(٢) - ١ ✓ \end{cases}$ النقطة تحقق النظام إذا تعتبر حلا له

• $(-٢،٢،٦) \leftarrow \begin{cases} -٢ + ٢ + ٦ = ٦ ✓ \\ ٢(-٢) - ٢ + ٦ = ٣ ✗ \\ -٦ = ٢(٢) - ١ ✗ \end{cases}$ النقطة لا تحقق النظام

• $(٣،٢،١) \leftarrow \begin{cases} ٣ + ٢ + ١ = ٦ ✓ \\ ٢(٣) - ٢ + ١ = ٣ ✗ \\ ٩ = ٢(٢) - ١ ✗ \end{cases}$ النقطة لا تحقق النظام

ملاحظة : يجب تجريب كل النقاط في النظام لأن هناك أنظمة يوجد لها عدد لا نهائي من الحلول .

٦) لدى رغد ٢٠ قطعة نقدية من الفئات : ٥ قروش ، ١٠ قروش ، ٢٥ قرشاً ، إذا كانت القيمة النقدية لهذه القطع جميعها تساوي ٣٫٨ ديناراً ، وكان عدد القطع النقدية من فئة العشر قروش أقل من مثلي عدد القطع من فئة الخمس قروش بمقدار ٢ ، فما عدد القطع النقدية في كل فئة .

الحل :

نفرض	فئة ٥ قروش	فئة ١٠ قروش	فئة ٢٥ قرشا
	س	ص	ع

- لدى رغد ٢٠ قطعة نقدية ← س + ص + ع = ٢٠ ....(١)
- القيمة النقدية لهذه القطع جميعها تساوي ٣٫٨ ديناراً

← ٥س + ١٠ص + ٢٥ع = ٣٨٠ ....(٢)

- عدد القطع النقدية من فئة العشر قروش أقل من مثلي عدد القطع من فئة الخمس قروش بمقدار ٢ ← ٢س − ص = ٢ ....(٣)
- نحذف المتغير ع من المعادلتين ١ ، ٢

−٢٥ × م١ + م٢ ← −٢٠س − ١٥ص = −١٢٠ (÷ −٥)

٤س + ٣ص = ٢٤ ......(٤)

- نحذف المتغير ص من المعادلتين ٣ ، ٤

٣ × م٣ + م٤ ← ١٠س = ٣٠ ← $\boxed{\text{س} = ٣}$

- نعوض قيمة س في معادلة ٣ لإيجاد قيمة ص

س = ٣ ← ٢(٣) − ص = ٢ ← $\boxed{\text{ص} = ٤}$

- نعوض قيمتي س ، ص في معادلة ١ لإيجاد قيمة ع

س = ٣، ص = ٤ ← ٣ + ٤ + ع = ٢٠ ← $\boxed{\text{ع} = ١٣}$

فئة ٥ قروش ٣ قطع
فئة ١٠ قروش ٤ قطع
فئة ٢٥ قرشاً ١٣ قطعة

٧) أكتب نظاماً مكوناً من معادلتين تربيعيتين ، بحيث تكون النقطة $(-٣،٥)$ إحدى حلول هذا النظام .

الحل :

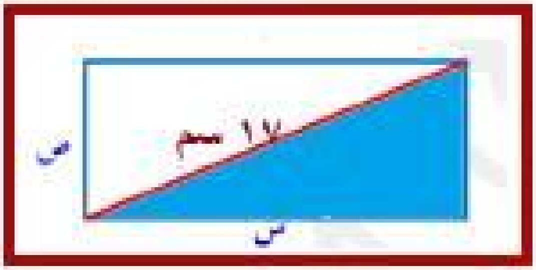
$$س^{٢} + ص^{٢} = ٣٤$$
$$٢س^{٢} - ٣ص^{٢} = -٥٧$$

ويوجد عدد لا نهائي من الأنظمة .

---

٨) إطار صورة على شكل مستطيل ، محيطه ٤٦ سم ، وطول قطره ١٧ سم ، فما بعداه

الحل :



نفرض بعدي المستطيل س،ص

محيط المستطيل = ٢ (البعد الأول + البعد الثاني)

$$٢(س + ص) = ٤٦ \leftarrow س + ص = ٢٣ \ldots(١)$$

- طول قطره ١٧ سم (بتطبيق مبرهنة فيثاغورث على المثلث الأزرق)

$$\leftarrow س^{٢} + ص^{٢} = ٢٨٩ \ldots(٢)$$

- من معادلة ١ نكتب س بدلالة ص $\leftarrow س = ٢٣ - ص \ldots(٣)$
- نعوض معادلة ٣ في معادلة ٢ ونرتب ونحل

$$(٢٣ - ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٨٩ \leftarrow ٥٢٩ - ٤٦ص + ص^{٢} + ص^{٢} = ٢٨٩$$
$$٢ص^{٢} - ٤٦ص + ٢٤٠ = ٠ \;(÷٢) \leftarrow ص^{٢} - ٢٣ص + ١٢٠ = ٠$$
$$(ص - ١٥)(ص - ٨) = ٠ \leftarrow ص = ١٥ ، ص = ٨$$

- $ص = ١٥ \leftarrow س = ٢٣ - ١٥ \leftarrow س = ٨ \leftarrow \boxed{(٨،١٥)}$
- $ص = ٨ \leftarrow س = ٢٣ - ٨ \leftarrow س = ١٥ \leftarrow \boxed{(١٥،٨)}$

بعد التأكد من صحة الحل بعدا الإطار هما ٨ سم ، ١٥ سم .

٩) عدد مكون من ثلاث منازل ، مجموع الأرقام للمنازل الثلاث يساوي ٩ ، رقم منزلة العشرات يساوي ثلاثة أمثال رقم منزلة المئات ، ورقم منزلة الآحاد يقل عن رقم منزلة المئات بمقدار ١ ، ما هو هذا العدد ؟

الحل :

نفرض	منزلة الآحاد	منزلة العشرات	منزلة المئات
	س	ص	ع

- مجموع الأرقام للمنازل الثلاث يساوي ٩ ← س + ص + ع = ٩ ...(١)
- رقم منزلة العشرات يساوي ثلاثة أمثال رقم منزلة المئات ← ص = ٣ع ...(٢)
- رقم منزلة الآحاد يقل عن رقم منزلة المئات بمقدار ١ ← س = ع − ١ ...(٣)
- نعوض معادلتي ٢ ، ٣ في معادلة ١ لإيجاد قيمة ع

ع − ١ + ٣ع + ع = ٩ ← $\boxed{\text{ع} = ٢}$

- ع = ٢ ← ص = ٣ع ← $\boxed{\text{ص} = ٦}$
- ع = ٢ ← س = ع − ١ ← $\boxed{\text{س} = ١}$

بعد التأكد من صحة الحل العدد هو ٢٦١

تم بحمد الله